

Lezione 16

Accelerazione del fluido propulsivo negli endoreattori termici

Negli endoreattori termici la spinta viene generata trasformando l'energia termica, fornita al fluido propulsivo da reazioni chimiche al suo interno o da riscaldamento esterno, in energia cinetica. Le modalità di accelerazione del flusso sono quindi le stesse per tutti gli endoreattori termici e, all'interno di questo gruppo, per tutti gli endoreattori chimici. Il componente che permette l'espansione del fluido propulsivo con la conversione di energia termica in energia cinetica del getto è detto ugello, e sebbene possa essere studiato con la stessa teoria già vista per gli ugelli dei propulsori aeronautici, esso presenta caratteristiche diverse, soprattutto a causa delle maggiori espansioni che caratterizzano i getti degli endoreattori. Infatti in questi ultimi non ci sono, per la pressione in camera di combustione, gli stessi limiti degli esoreattori, essenzialmente dati dal valore della pressione atmosferica e dalle capacità del compressore.

Come si è visto in Lezione 3 la spinta fornita da un endoreattore può essere espressa in funzione delle proprietà del getto nella sezione di uscita dell'ugello. Lo scopo principale dello studio che verrà fatto in questo capitolo è quello di vedere come le caratteristiche progettuali dell'ugello di un endoreattore influenzano la spinta e l'impulso specifico. Sebbene la gran parte delle derivazioni e discussioni del capitolo sono valide per qualunque endoreattore termico e cioè anche per endoreattori nucleari, endoreattori ad arco elettrico e a riscaldamento solare, l'attenzione sarà rivolta principalmente alla famiglia di endoreattori termici di gran lunga più diffusa che è quella degli endoreattori chimici.

16.1 Ugello Ideale

Per analizzare le prestazioni degli endoreattori in funzione delle proprietà dell'ugello propulsivo, si considera il caso di ugello ideale (detto anche di endoreattore ideale [4, pag.41]), cioè avente caratteristiche tali da soddisfare un certo numero ipotesi semplificative. In questo caso i principi base della fluidodinamica all'interno di un ugello propulsivo sono espressi matematicamente in forma semplificata e monodimensionale, e forniscono una semplificazione e idealizzazione del reale comportamento del flusso. Quest'analisi permette di avere una stima delle prestazioni di un endoreattore chimico reale con un errore compreso in genere tra l'1 e il 6% [4, pag. 42], per cui l'analisi preliminare è svolta proprio nell'ipotesi di endoreattore ideale. Un endoreattore ideale è dunque quello che soddisfa le seguenti ipotesi:

- I dettagli del processo di combustione sono ignorati e il fluido propulsivo è costituito dai prodotti

di combustione che sono considerati come costituenti di un gas termicamente e caloricamente perfetto, non reagente e omogeneo.

- Il flusso è stazionario.
- Sulle superficie normali alle linee di corrente le proprietà del flusso sono assunte costanti (modello monodimensionale, detto anche quasi-monodimensionale in quanto le proprietà del flusso dipendono dalla variazione dell'area della sezione, e quindi da effetti pluridimensionali, anche se trattati con teoria 1D).
- La velocità del flusso nella sezione di ingresso dell'ugello è trascurabile e le sue condizioni sono uniformi nello spazio e nel tempo.
- Il flusso è isentropico, a meno che non siano presenti urti; in particolare non si tiene conto dell'attrito e degli scambi di calore (flusso non viscoso e adiabatico).

Avendo ipotizzato che la miscela di gas si comporta come un unico gas caloricamente e termicamente perfetto, vale l'equazione di stato

$$p = \rho RT \quad \text{con} \quad R = \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}} \quad (16.1)$$

dove \mathcal{R} è la costante universale dei gas e \mathcal{M} è il peso molecolare medio della miscela. Pertanto assegnate due variabili di stato termodinamico (p.es. p_c e T_c in camera di combustione) sono automaticamente note tutte le altre (p.es. ρ_c dalla (16.1)).

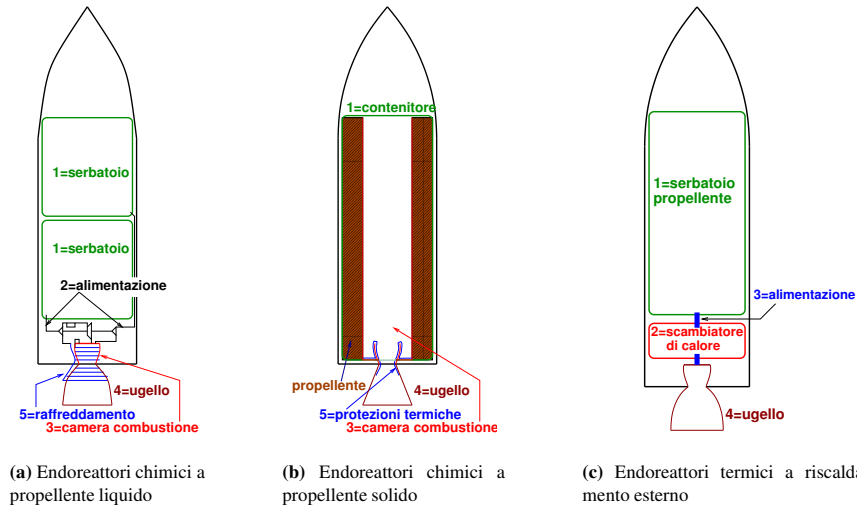


Figura 16.1: Componenti degli endoreattori termici.

In tali ipotesi è utile innanzitutto riscrivere le equazioni di conservazione di massa, quantità di moto ed energia. Riprendendo lo schema di un condotto 1D a sezione non costante ricordando l'ipotesi di

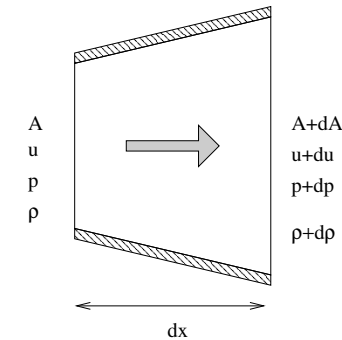


Figura 16.2: Schema di condotto per il calcolo di flusso quasi-monodimensionale.

flusso stazionario, la portata entrante nel condotto deve essere uguale a quella uscente. Pertanto in termini differenziali e finiti si ha, rispettivamente:

$$\rho u A = (\rho + d\rho)(u + du)(A + dA) \Rightarrow d(\rho u A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{m} = \rho u A = \text{costante} \quad (16.2)$$

Analogamente per la quantità di moto

$$\begin{aligned} \dot{m}(u + du) - \dot{m}u &= pA + \left(p + \frac{dp}{2}\right)dA - (p + dp)(A + dA) \\ &\Rightarrow dp + \rho u du = 0 \end{aligned} \quad (16.3)$$

e per l'energia

$$\begin{aligned} \dot{m} \left[e + \frac{u^2}{2} + d \left(e + \frac{u^2}{2} \right) \right] - \dot{m} \left(e + \frac{u^2}{2} \right) &= p u A - (p + dp)(u + du)(A + dA) \\ \dot{m} d \left(e + \frac{u^2}{2} \right) + d(p u A) &= 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{m} d \left(e + \frac{u^2}{2} \right) + d \left(\dot{m} \frac{p}{\rho} \right) = 0 \\ \dot{m} d \left(e + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) &= 0 \quad \Rightarrow \quad dh_0 = 0 \end{aligned} \quad (16.4)$$

avendo introdotto l'energia interna specifica e , l'entalpia specifica $h = e + p/\rho$, e l'entalpia specifica totale $h_0 = h + u^2/2$. Sostituendo le ultime due all'equazione differenziale che definisce l'entropia in base al secondo principio della termodinamica, si ottiene facilmente che il flusso risultante è isentropico. Inoltre, dall'equazione della quantità di moto, utilizzando opportunamente l'equazione di stato e quella di conservazione dell'energia si ottengono le equazioni di Poisson per un flusso isentropico:

$$T ds = dh - dp/\rho \quad \underbrace{\Rightarrow}_{dp + \rho u du = 0} \quad T ds = dh + u du = dh_0 = 0 \quad (16.5)$$

$$dh - dp/\rho = 0 \implies \frac{T}{T_c} = \left(\frac{p}{p_c}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (16.6)$$

Avendo supposto la velocità del flusso trascurabile nella sezione di ingresso dell'ugello (le cui condizioni termodinamiche verranno quindi in seguito identificate con quelle in camera di combustione) si ha che il valore costante di entalpia totale e quindi di temperatura e pressione totali è ovunque pari a quello della sezione di ingresso e cioè questi valori sono pari a quelli statici in camera di combustione: $h_0 = h_c$, $T_0 = T_c$, $p_0 = p_c$, ...

Dall'equazione dell'energia si ottiene dunque una semplice espressione per la velocità del fluido propulsivo nella generica sezione dell'ugello, una volta noto il valore di una variabile di stato termodinamico (la seconda è $s = 0$ e di conseguenza le altre). In particolare, se si considera la sezione di efflusso, indicata al solito con $()_e$:

$$u_e = \sqrt{2(h_c - h_e)} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} RT_c \left(1 - \frac{T_e}{T_c}\right)} \quad \text{essendo } h = c_p T \text{ e } c_p = \frac{\gamma R}{\gamma-1} \quad (16.7)$$

$$u_e = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{RT_c}{\mathcal{M}} \left[1 - \left(\frac{p_e}{p_c}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]} \quad (16.8)$$

Questa equazione permette di fare importanti considerazioni sulle grandezze da cui dipende la velocità e il suo valore massimo ottenibile per assegnate condizioni in camera di combustione¹. Si osserva innanzitutto che u_e cresce all'aumentare del rapporto di espansione p_c/p_e e del termine RT_c e che dipende anche dal valore di γ . Si osserva inoltre che per $p_c/p_e \rightarrow \infty$ la velocità di efflusso tende asintoticamente al suo valore massimo detto velocità limite.

La velocità limite si raggiunge quando tutta l'energia termica è stata trasformata in energia cinetica. Si può quindi scrivere:

$$u_{lim} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{RT_c}{\mathcal{M}}} \implies u_e = u_{lim} \sqrt{\left[1 - \left(\frac{p_e}{p_c}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]} \quad (16.9)$$

E' facile vedere dalla sua espressione che la velocità limite decresce al crescere di γ . Si può notare però che il rapporto u_e/u_{lim} cresce al crescere di γ (Fig. 16.3) per cui sebbene anche u_e decresce all'aumentare di γ tale diminuzione è inferiore a quella che caratterizza la u_{lim} . Il quadrato del rapporto u_e/u_{lim} , il cui andamento in funzione del rapporto di espansione è mostrato in Fig. 16.3 dove si può notare l'andamento asintotico al crescere di p_c/p_e , viene anche indicato con η in quanto ha la stessa espressione del rendimento di un ciclo termodinamico ideale di motore a pressione costante caratterizzato dallo stesso rapporto di pressioni. Va osservato che la velocità limite in realtà non potrà mai essere raggiunta in quanto preceduta dalla liquefazione del gas e, prima ancora, dalla caduta delle ipotesi fatte sul gas (caloricamente e termicamente perfetto). L'espressione della velocità limite, ricordando la relazione tra velocità di efflusso e impulso specifico indica chiaramente che un aumento della temperatura del gas (di solito associato ad un corrispondente incremento dell'energia rilasciata) o una diminuzione del peso molecolare del fluido propulsivo (di solito ottenuta usando gas a basso peso molecolare ad alto contenuto di

¹Nota che qui si indica genericamente come camera di combustione quella che è la sezione di ingresso dell'ugello dove non necessariamente avviene la combustione. Quest'ultimo è ad esempio il caso di endoreattori termonucleari in cui le condizioni in camera di combustione sono in realtà i valori di ristagno dell'idrogeno scaldato dal reattore.

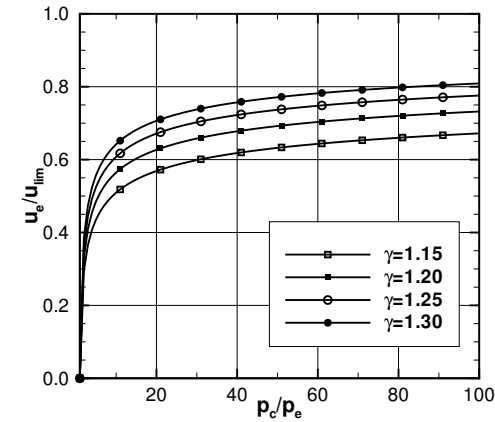


Figura 16.3: Andamento del rapporto tra velocità di efflusso e velocità limite in funzione del rapporto di espansione.

idrogeno) migliora le prestazioni dell'endoreattore. E questa influenza è più determinante di quanto non lo siano il rapporto di pressione e il valore di γ . Ci sono chiaramente limiti sulla massima temperatura totale dei gas. Questi sono dati dalla scelta dei propellenti (reagenti e prodotti della reazione di combustione sono caratterizzati da una energia di reazione), dal fatto che al di sopra di 2800 K le reazioni di dissociazione cominciano ad assorbire parte dell'energia di reazione e questa frazione cresce al crescere della temperatura, e infine ci sono limiti strutturali determinati dai materiali che compongono camera di combustione e ugello. Va osservato che la dipendenza da γ non offre possibilità di utilizzazione pratica.

Le equazioni ricavate con la teoria monodimensionale consentono di esprimere anche la portata in funzione di alcune grandezze caratteristiche dell'ugello. Per fare questo si calcola la portata in corrispondenza della sezione di gola. Si nota infatti che l'ugello di un endoreattore funziona sempre (a stazionario) in condizioni saturate poiché, vista l'assenza di una correlazione tra pressione in camera di combustione e pressione ambiente, e vista l'assenza di una precedente espansione in turbina, il rapporto p_c/p_0 è sempre superiore a 2 e quindi a p_c/p_* (quest'ultimo valore è al massimo 2.07 per fluido propulsivo con $\gamma = 1.67$ e decresce al decrescere di γ essendo dell'ordine di $1.7 \div 1.8$ per i propellenti più comuni). In condizioni di saturazione le condizioni in gola sono tali che $M_t = 1$ e quindi la portata può essere calcolata in funzione dell'area di gola:

$$\dot{m} = \rho_* u_* A_* = \rho_t u_t A_t \quad (16.10)$$

dove A_t è l'area della sezione di gola, mentre u_t , la velocità nella sezione di gola, può essere espressa come:

$$u_t = a_t = \sqrt{\gamma RT_t} = \sqrt{\gamma RT_c \left(\frac{T_t}{T_c}\right)} = \sqrt{\gamma RT_c \left(\frac{1}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_t^2}\right)} = \sqrt{\gamma RT_c} \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{1/2} \quad (16.11)$$

e infine la densità nella sezione di gola ρ_t :

$$\rho_t = \rho_c \left(\frac{\rho_t}{\rho_c} \right) = \frac{p_c}{RT_c} \left(\frac{1}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_t^2} \right)^{1/(\gamma-1)} = \frac{p_c}{RT_c} \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{1/(\gamma-1)} \quad (16.12)$$

Utilizzando le espressioni appena ricavate si può riscrivere l'espressione della portata in funzione delle condizioni in camera di combustione (p_c , T_c), della area della sezione di gola A_t e delle proprietà del fluido propulsivo (γ , R):

$$\dot{m} = \frac{p_c}{RT_c} \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{1/(\gamma-1)} \sqrt{\gamma RT_c} \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{1/2} A_t = \frac{p_c A_t}{\sqrt{RT_c}} \sqrt{\gamma \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}} \quad (16.13)$$

quindi si può scrivere la relazione più comunemente usata per esprimere la portata in un endoreattore e che sarà più volte ripresa nel seguito:

$$\dot{m} = \frac{\Gamma p_c A_t}{\sqrt{RT_c}} \quad (16.14)$$

questa forma sintetica è ottenuta introducendo una nuova funzione Γ in cui sono contenuti tutti i termini dipendenti da γ :

$$\Gamma = \sqrt{\gamma \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}} \quad (16.15)$$

si osserva che Γ dipende solo da γ e varia poco con esso, assumendo valori compresi tra 0.63 e 0.67 per γ compresi tra 1.1 e 1.3. L'espressione (16.14) mette in rilievo la proporzionalità diretta tra \dot{m} e p_c , A_t e la massa molare \mathcal{M} (si ricorda $R = \mathcal{R}/\mathcal{M}$), e quella inversa tra \dot{m} e T_c . Riguardo alle dipendenze funzionali della portata va osservato che il valore di portata che si stabilisce è funzione delle condizioni in camera di combustione (p.es. condizioni di iniezione o caratteristiche del propellente solido, a seconda dei casi) e dell'area di gola, e quindi il valore di p_c dipenderà anch'esso dal valore di A_t . I valori di T_c , \mathcal{M} e γ sono invece propri del propellente considerato.

16.2 Parametri caratteristici di un endoreattore

Avendo ottenuto nel paragrafo precedente delle relazioni che permettono di esprimere portata e velocità di efflusso in funzione dei valori delle variabili in camera di combustione, del rapporto d'area e delle proprietà del fluido propulsivo, si vuole ora vedere come queste variabili influenzano le prestazioni dell'endoreattore. Queste ultime sono date essenzialmente da spinta e impulso specifico, tuttavia l'introduzione di altri parametri permetterà di evidenziare con ciascuno di essi alcuni aspetti del sistema propulsivo.

Si considera innanzitutto l'espressione della della spinta dell'endoreattore, che era stata ottenuta nella Lezione 3:

$$F = \dot{m}_p u_e + (p_e - p_a) A_e \quad (16.16)$$

all'interno di questa equazione si possono sostituire le espressioni ricavate sopra per u_e e \dot{m} nel paragrafo precedente. Prima di fare questo è però utile svolgere delle considerazioni sulla (16.16) riguardo

al rapporto di espansione che consente la massima spinta. Si è visto infatti che per un endoreattore si considererà sempre ugello saturato e in particolare ugello convergente divergente per permettere di sfruttare al meglio la differenze tra pressione in camera e pressione ambiente. Ci si chiede allora quale sia il valore del rapporto di espansione (che a sua volta, come è stato visto, è funzione del rapporto tra area di efflusso e area di gola $\epsilon = A_e/A_t$) che permette la massima spinta a parità di altre condizioni. Si ricava facilmente che ciò avviene quando l'ugello è adattato, infatti essendo \dot{m} costante, differenziando la (16.16) si ottiene:

$$dF = \dot{m} du_e + (p_e - p_a) dA_e + A_e dp_e \quad (16.17)$$

e quindi, ricordando la (16.3)

$$\begin{aligned} dF &= \rho_e u_e A_e du_e + A_e dp_e + (p_e - p_a) dA_e \\ &= (\rho_e u_e du_e + dp_e) A_e + (p_e - p_a) dA_e = (p_e - p_a) dA_e \end{aligned} \quad (16.18)$$

dF/dA_e si annulla ed ha un massimo² per A_e tale che $p_e = p_a$, che è la condizione detta di ugello adattato. In questa condizione il termine di pressione si annulla e la spinta è pari a quella impulsiva.

Per semplicità si considera innanzitutto l'espressione della spinta per un ugello adattato. Ricordando le (16.8) e (16.14) si ha:

$$F = \dot{m}_p u_e = \Gamma p_c A_t \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{p_e}{p_c} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]} \quad (16.19)$$

è interessante osservare che la spinta è indipendente da \mathcal{M} e da T_c mentre è direttamente proporzionale al prodotto $p_c A_t$ e ad un termine adimensionale dipendente da γ e dal rapporto di espansione. Si vede allora che è comodo prendere come valore di riferimento per la spinta proprio il prodotto $p_c A_t$ e introdurre un coefficiente adimensionale C_F che indica qual'è la prestazione del sistema propulsivo in termini di generazione della spinta a parità di pressione in camera di combustione e area di gola. Tale coefficiente è detto coefficiente di spinta e si definisce quindi come:

$$C_F = \frac{F}{p_c A_t} \quad (16.20)$$

e rappresenta le proprietà di espansione dell'ugello, come si può osservare riscrivendone l'espressione completa (che include anche il termine di spinta di pressione, ugello non adattato):

$$C_F = \Gamma \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{p_e}{p_c} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]} + \frac{A_e}{A_t} \left(\frac{p_e}{p_c} - \frac{p_a}{p_c} \right) \quad (16.21)$$

Quindi C_F dipende da γ , dal rapporto d'area $\epsilon = A_e/A_t$, dal rapporto tra pressione in camera di combustione e pressione ambiente p_c/p_a e dal rapporto di espansione p_c/p_e . Quest'ultimo, almeno finché l'ugello è saturato e il flusso al suo interno isentropico, è funzione soltanto di γ e del rapporto d'area ϵ :

$$\epsilon = \frac{\Gamma}{\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{p_e}{p_c} \right)^{2/\gamma} \left[1 - \left(\frac{p_e}{p_c} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right]}} \quad (16.22)$$

²Si vede facilmente che $d^2 F/dA_e^2 < 0$ essendo $dp_e/dA_e < 0$ e $dp_a/dA_e = 0$.

e quindi $C_F = f(\gamma, \epsilon, p_c/p_a)$. Tornando all'espressione della spinta e considerando ora il caso generale anziché quello più semplice dell'ugello adattato, si può dire che, essendo per definizione $F = C_F p_c A_t$, risulta che la spinta è:

- indipendente dal peso molecolare del gas \mathcal{M} e dalla temperatura T_c ;
- dipende linearmente da A_t ;
- dipende un pò più che linearmente da p_c (che è anche in C_F);
- lineare con C_F che a sua volta decresce con γ ed ha un massimo al variare di ϵ quando questo è tale che $p_e = p_a$.

Per capire meglio il comportamento del coefficiente di spinta si possono osservare i diagrammi riportati in Fig. 16.4 e Fig. 16.5. Nel primo il valore di C_F nel caso adattato è riportato in funzione del

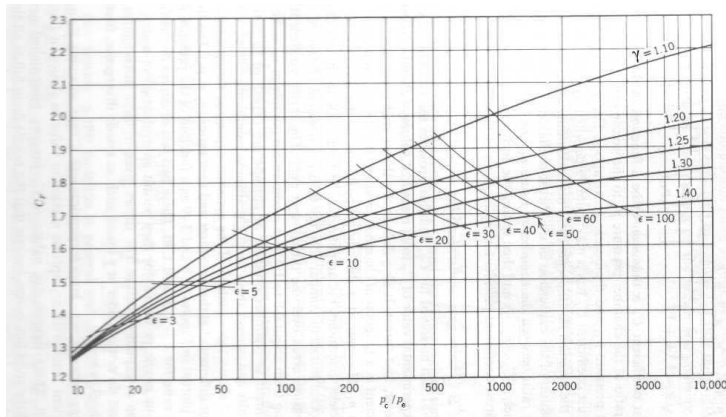


Figura 16.4: Coefficiente di spinta di un ugello adattato in funzione del rapporto di espansione e del rapporto tra i calori specifici (adattata da [4]).

rapporto di espansione p_c/p_e con γ a parametro. Il grafico mostra che C_F cresce con p_c/p_e ed ha valori più elevati quanto più basso è il valore di γ . Si nota inoltre, dalle linee tracciate ad ϵ costante, che a parità di ϵ il valore di p_c/p_e cresce con γ . Tuttavia ciò non compensa l'effetto precedente per cui anche a parità di ϵ il valore di C_F è più alto quanto più basso è il valore di γ .

Gli andamenti di C_F in funzione di ϵ riportati in Fig. 16.5 sono spesso mostrati per analizzare il comportamento di un ugello avente un assegnato rapporto di espansione al variare della quota. Tale diagramma si riferisce ad un assegnato valore di γ , e le linee tracciate nel grafico si riferiscono ciascuna ad una quota, individuata dal rapporto p_c/p_a . Se si considera un ugello di geometria assegnata, cioè un assegnato valore di ϵ , ad ogni quota (cioè ad ogni linea p_c/p_a =costante) corrisponde un valore di C_F dato dall'intersezione della linea p_c/p_a =costante con la linea verticale corrispondente ad ϵ . Si nota che C_F cresce al crescere di z , fino a raggiungere un valore massimo nel vuoto ($p_c/p_a \rightarrow \infty$). Se invece si studia il comportamento di C_F ad una quota assegnata e al variare del rapporto di espansione ϵ , si nota che il C_F ha un massimo per il rapporto di espansione tale che $p_e = p_a$. È interessante anche notare

i valori limite rappresentati nel grafico. Da una parte si nota la curva che rappresenta l'andamento di C_F al variare di ϵ nel vuoto, che tende ad un valore finito (quello tale che tutta l'energia disponibile si è trasformata in energia cinetica) al tendere di ϵ all'infinito. Dall'altra parte c'è una linea indicata come

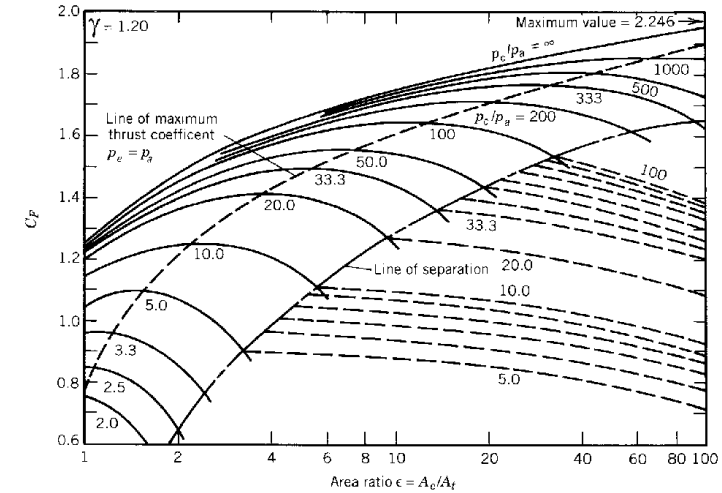


Figura 16.5: Coefficiente di spinta in funzione del rapporto di espansione e del rapporto p_c/p_a per $\gamma = 1.2$ (adattata da [4]).

linea di separazione che mostra le condizioni al di là delle quali la sovraespansione è tale da produrre una separazione del flusso all'interno del divergente e quindi le ipotesi fatte all'inizio di flusso isentropico non sono più valide. Le linee tratteggiate stanno tuttavia ad indicare che se non fosse per problemi legati alla stabilità di funzionamento in condizioni di flusso separato, la separazione avrebbe l'effetto positivo di "adattare" in qualche modo il rapporto d'area alla pressione ambiente (la curva tratteggiata si pone su valori di C_F più elevati di quelli che si otterrebbero proseguendo la linea continua). Va infine menzionata la linea che unisce i massimi dei C_F ottenuti per ciascun valore di p_c/p_a . Tale linea indica l'andamento del C_F per un ugello ideale sempre adattato ed è l'obiettivo cui avvicinarsi nella realizzazione di ugelli che debbano operare in condizioni ambiente variabili.

Come l'analisi del comportamento della spinta porta all'introduzione del coefficiente di spinta anche quella dell'impulso specifico conduce all'introduzione di un altro parametro caratteristico degli endoreattori termici. Se infatti si riprende l'espressione dell'impulso specifico si può osservare che:

$$I_{sp} = \frac{u_{eq}}{g_0} = \frac{F}{\dot{m}_p g_0} = \frac{1}{g_0} \underbrace{\left(\frac{p_c A_t}{\dot{m}_p} \right)}_{\text{velocità caratteristica } c^*} C_F = \frac{c^* C_F}{g_0} \quad (16.23)$$

e quindi l'impulso specifico è proporzionale a C_F e ad un'altro termine che ha le dimensioni di una

velocità ed è detto velocità caratteristica. Ricordando l'espressione della portata si vede che:

$$c^* = \frac{p_c A_t}{\dot{m}_p} = \frac{\sqrt{RT_c}}{\Gamma} = \frac{1}{\Gamma} \sqrt{\frac{RT_c}{\mathcal{M}}} \quad (16.24)$$

La velocità caratteristica dipende dalle caratteristiche del propellente e della combustione (o del riscaldamento) ed è una misura dell'energia disponibile per l'accelerazione del flusso nell'ugello. Il coefficiente di spinta è invece una misura di quanto tale energia disponibile viene convertita in energia cinetica.

Osservando le (16.21), (16.23) e (16.24) si può dire in generale che l'impulso specifico: dipende linearmente da c^* e da C_F , e, viste le dipendenze funzionali di c^* e C_F , ciò vuol dire anche che l'impulso specifico:

- cresce con T_c e decresce con \mathcal{M} ;
- ha un massimo al variare di ϵ quando questo è tale che $p_e = p_a$;
- cresce lievemente con p_c grazie all'aumento del termine di pressione in C_F .

In base a questi risultati si può osservare che una volta scelto la combinazione di propellenti (e quindi temperatura in camera di combustione, massa molare e rapporto dei calori specifici dei prodotti della combustione) le prestazioni dipendono essenzialmente dal rapporto di espansione dell'ugello. La scelta di quest'ultimo dipende dalla particolare missione considerata, che può imporre vincoli di progetto diversi, come ad esempio accade per ugelli di sistemi di lancio e per ugelli di motori operanti nello spazio:

- **Sistemi di Lancio**
L'ugello deve operare in condizioni atmosferiche variabili. Pes. per un primo stadio dalla pressione atmosferica a livello del mare fino a quella della quota di fine operazione.
- **Sistemi Spaziali**
L'ugello deve operare nel vuoto. Si richiede il massimo rapporto di espansione possibile. Il limite è quello per cui l'aumento del peso dell'ugello ha un effetto negativo superiore a quello positivo dell'incremento di spinta e impulso specifico. Un altro limite è dato dall'ingombro che deve soddisfare i vincoli richiesti dal sistema di lancio utilizzato (a tale scopo sono stati proposti ugelli estensibili).

16.3 Geometria degli ugelli

È stato visto che nelle ipotesi di flusso monodimensionale isentropico l'unica variabile geometrica di interesse è l'area della sezione. Per un ugello reale dovrà invece essere definito il suo profilo e la scelta di quest'ultimo può avere un effetto piuttosto importante sulle prestazioni. Il progetto di un vero ugello richiede di specificare l'intera sua forma e di solito si considerano anche le variazioni di pressione e velocità lungo superfici normali alle linee di corrente. Oltre a questi effetti di bi- o tridimensionalità del caso reale, nella realizzazione pratica vanno considerati altri aspetti quali l'effetto dell'attrito, degli scambi termici, della presenza di reazioni chimiche nel flusso, e altri effetti minori.

Innanzitutto va posto in rilievo che nella maggior parte dei casi si considerano ugelli a sezione circolare, anche se in alcuni casi può essere conveniente pensare ad altre sezioni (soprattutto per quanto

riguarda la sezione di uscita) che permettano una migliore integrazione con la base del veicolo. In effetti, la sezione circolare ha il vantaggio di essere a simmetria assiale e di fornire il minimo ingombro trasversale. Pertanto quando si parlerà d'ora in poi del profilo dell'ugello si intenderà la linea ottenuta dall'intersezione della superficie dell'ugello con il generico piano radiale. È stato visto che gli

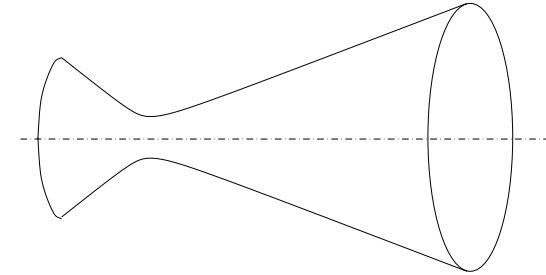


Figura 16.6: Ugello convergente-divergente a sezione circolare di forma conica.

ugelli di endoreattori presentano sempre un profilo convergente-divergente. Si analizzano di seguito separatamente le diverse parti.

16.3.1 Convergente e regione di gola

L'esatta forma del convergente non è materia di grande importanza in quanto si tratta di una regione di flusso subsonico con gradiente favorevole e quindi qualunque superficie regolare dà un buon flusso. Il rapporto di contrazione è governato dalle proprietà della camera di combustione e dalla limitazione delle perdite di pressione totale nella fase di adduzione di calore (o di massa). Infatti il rapporto tra l'area massima e l'area di gola determina la velocità minima dei gas, che è quella in corrispondenza della quale avvengono le reazioni chimiche e di conseguenza l'adduzione di calore. Come è stato visto in Lez. 2 tanto maggiore è la velocità del flusso al quale viene ceduto calore tanto più elevata è la perdita di pressione totale e ciò anche per le camere di combustione di endoreattori chimici, siano essi a propellente liquido o solido. Per questa ragione è opportuno che il rapporto di contrazione sia sufficientemente elevato da contenere le perdite di pressione totale in fase di rilascio dell'energia. Nella pratica questo rapporto di contrazione è compreso tra 1.5 e 4.

L'angolo medio di convergenza è di $30^\circ \div 45^\circ$ e nella zona di gola il profilo viene raccordato a quello del divergente con un arco di circonferenza il cui raggio di curvatura è un pò più grande del raggio di gola (fino a 2÷3 volte). Il disegno della gola è importante perché definisce la portata dell'ugello. In genere si fa con due archi di circonferenza di raggio diverso aventi la stessa tangente nel punto di area minima. Gli effetti della curvatura si fanno sentire sempre di più al diminuire del raggio di curvatura a monte della gola. In particolare, l'area di gola effettiva si riduce al diminuire di questo raggio e di conseguenza la portata smaltita. Sulla scelta sono comunque molto importanti considerazioni riguardanti la facilità o meno di fabbricazione, gli scambi termici, etc . . .

16.3.2 Divergente

La parte più critica da progettare è invece il divergente. Infatti, essendo il flusso supersonico, anche se si trascura l'effetto dello strato limite, nel caso di un disegno poco attento si possono generare delle

onde d'urto che possono provocare perdite di prestazioni sostanziali. Diversi profili sono stati proposti e realizzati per il divergente supersonico, ma di seguito si esaminano soltanto quelli di principale interesse (Fig. 16.7).

	Cone	Contoured or Bell-Shaped	Plug	Expansion-Deflection
Shape				
Flow with underexpansion at altitude				
Flow with overexpansion, (Sea level)				
Mass flow distribution at exit				

Figura 16.7: Principali tipologie di ugelli e loro caratteristiche di efflusso (da [4]).

Divergente conico e perdite per divergenza

La geometria più semplice è certamente quella conica disegnata in Fig. 16.6. La forma semplice permette una facile fabbricazione e pertanto il divergente conico è quello preferito quando l'aspetto critico non è tanto la massima prestazione ma l'affidabilità e l'economicità di progetto, sviluppo e realizzazione.

Assegnato il rapporto d'area, e la regione di gola, il divergente conico è definito da un solo parametro: l'angolo di semiapertura del cono α . E' evidente che si cercherà di considerare coni con α maggiore possibile. Infatti ciò accorcia l'ugello e quindi riduce peso e attrito (sia interno che esterno) oltre che la superficie da raffreddare. A parità di area di uscita infatti l'area laterale va con $1/\sin \alpha$. Tuttavia le controindicazioni di α elevati sono:

- rischio di separazione del getto (ma solo per α molto grandi);
- perdite di divergenza (soprattutto).

Infatti bisogna considerare che solo la componente in direzione assiale della quantità di moto impartita al flusso propulsivo è quella utile ai fini della spinta e quindi se il gas viene espulso con componenti significative in direzione radiale si può avere una significativa riduzione della spinta rispetto a quella



stimata dall'analisi monodimensionale. Per verificare quanto possono essere importanti queste perdite si può notare che per un ugello conico, abbastanza lungo, è rappresentativa del flusso nella sezione di uscita una schematizzazione secondo cui il gas viene espulso con velocità avente modulo costante, ma diretta lungo il raggio di una sfera centrata nel vertice del cono (Fig. 16.8). Sia $OA=OB=l$ e $CC'=r = l \sin \phi$.

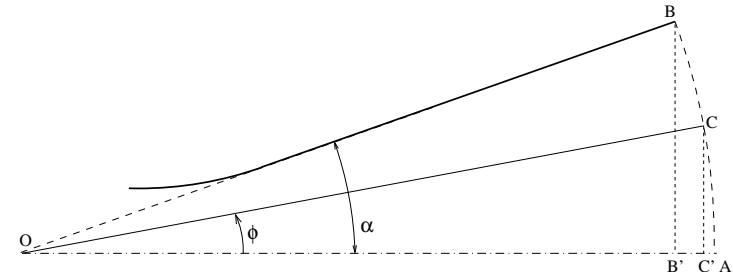


Figura 16.8: Definizioni geometriche per il calcolo delle perdite di divergenza di un ugello conico.

La superficie della calotta sferica lungo cui si ha $u_e = cost$ ha area:

$$A'_e = \int_0^\alpha 2\pi r l d\phi = 2\pi l^2 \int_0^\alpha \sin \phi d\phi = 2\pi l^2 (1 - \cos \alpha) \quad (16.25)$$

La sezione trasversale considerata nel caso monodimensionale ha invece area $A_e = \pi l^2 / \sin^2 \alpha$ e quindi:

$$A'_e = A_e \frac{2(1 - \cos \alpha)}{\sin^2 \alpha} = A_e \frac{2}{1 + \cos \alpha} \quad (16.26)$$

Nelle ipotesi fatte la portata è data da

$$\dot{m} = \rho_e u_e A'_e \quad (16.27)$$

Si nota che in prima approssimazione si può infatti considerare che $u'_e = u_e$ e così per le altre variabili vista la piccola differenza tra A_e e A'_e .

$$F = \int_{A'_e} \rho_e (\mathbf{u}_e \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{u}_e \cdot \mathbf{i}) dA + \int_{A'_e} (p_e - p_a) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}) dA \quad (16.28)$$

e sostituendo ai dA le espressioni ricavate da Fig. 16.8

$$F = \int_0^\alpha \rho_e (\mathbf{u}_e \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{u}_e \cdot \mathbf{i}) (2\pi l^2 \sin \phi) d\phi + (p_e - p_a) \int_{A'_e} \cos \phi (2\pi l^2 \sin \phi) d\phi \quad (16.29)$$

da cui

$$F = \int_0^\alpha 2\pi \rho_e u_e^2 l^2 \sin \phi \cos \phi d\phi + \pi l^2 \sin^2 \alpha (p_e - p_a) \quad (16.30)$$

si osserva che $\pi l^2 \sin^2 \alpha = A_e$ per cui

$$F = \int_0^\alpha 2\pi \rho_e u_e^2 l^2 \sin \phi \cos \phi d\phi + \pi l^2 \sin^2 \alpha (p_e - p_a) \quad (16.31)$$



essendo poi $\dot{m} = \rho_e u_e A'_e$ si ottiene:

$$F = \rho_e u_e^2 A_e + (p_e - p_a) A_e = \dot{m} u_e \frac{A_e}{A'_e} + (p_e - p_a) A_e \quad (16.32)$$

e quindi

$$F = \lambda \dot{m} u_e + (p_e - p_a) A_e \quad \text{dove} \quad \lambda = \frac{1 + \cos \alpha}{2} \quad (16.33)$$

La conclusione è che la spinta impulsiva è ridotta per effetto della divergenza di un fattore λ . Il calcolo

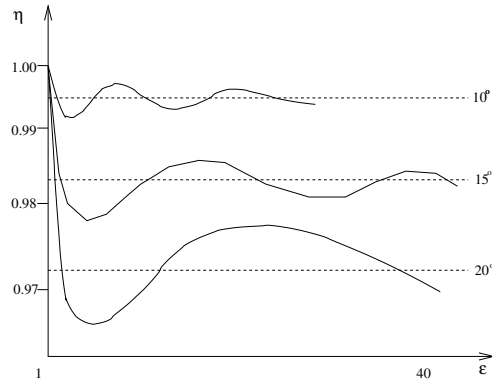


Figura 16.9: Rapporto η tra la spinta di un ugello conico e quella calcolata con l'approssimazione 1D al variare del rapporto d'area ϵ . Si nota che per ϵ elevati $\eta \rightarrow \lambda$, indicato dalle linee in tratteggio.

della spinta di ugelli conici, mostra che effettivamente λ è un buon indicatore delle perdite di divergenza, tanto migliore quanto più sono verificate le ipotesi di flusso conico, cosa che avviene quanto più si è lontani dal vertice del cono (Fig. 16.9).

Per questa ragione gli ugelli conici sono limitati ad angoli di apertura tra i 12° e i 18°. Per angoli inferiori sono troppo lunghi, per angoli superiori le perdite di divergenza iniziano ad essere troppo elevate. Per definizione un ugello conico è soggetto a questo tipo di perdite. Si è allora cercato di realizzare geometrie che consentissero di avere un flusso più uniforme in direzione assiale. Come lunghezza di riferimento per capire quanto l'ugello sia effettivamente compatto si considera quella di un ugello conico con angolo di semiapertura di 15°.

Ugelli a campana o contornati

Con tali ugelli si vogliono ridurre le perdite di divergenza viste per gli ugelli conici senza dover realizzare ugelli troppo lunghi e quindi pesanti. Tali ugelli (vedi Fig. 16.7 e Fig. 16.10) presentano elevati angoli nella zona immediatamente a valle della sezione di gola ($30 \div 60^\circ$) seguiti da un profilo che gradualmente diminuisce l'angolo di divergenza fino a giungere a valori molto bassi ($2 \div 8^\circ$) nella sezione di efflusso dell'ugello. La progettazione di una geometria di questo tipo può essere fatta grazie a modelli bidimensionali che consentono di disegnare la parte concava in cui si riduce l'angolo di divergenza in

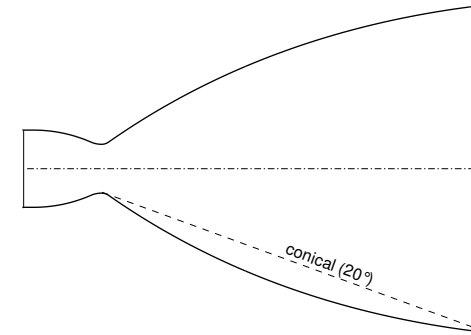


Figura 16.10: Ugello contornato o a campana.

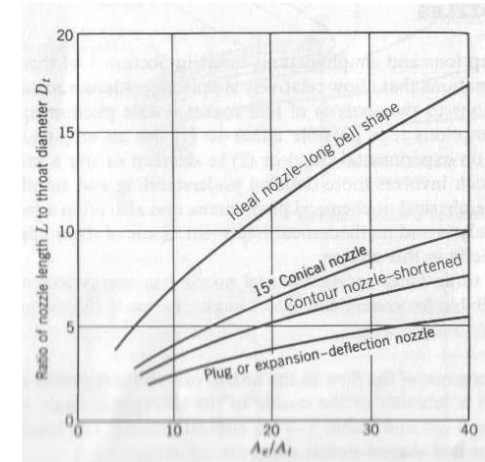


Figura 16.11: Confronto della lunghezza di vari tipi di ugelli a parità di rapporto d'area (da [4]).

modo da compensare le onde di espansione che vi giungono senza generare delle onde di compressione che potrebbero dar luogo ad urti. In generale si riescono ad ottenere, rispetto all'ugello conico, minori perdite di spinta per divergenza a parità di lunghezza e di rapporto d'area. In particolare, il confronto con un ugello conico a 15° riportato in Fig. 16.11 mostra che gli ugelli contornati sono più corti di quelli conici a parità di rapporto d'area e hanno il vantaggio di presentare perdite di divergenza inferiori. Va rilevato che nel caso di endoreattori a propellente solido si preferiscono ugelli conici perché la presenza di particelle solide all'interno del fluido propulsivo (flusso bifase) provoca il danneggiamento delle superficie nel caso in cui esse siano concave (come nel caso del profilo "a campana").

Ugelli nonconvenzionali

Lo sviluppo degli ugelli convenzionalmente utilizzati, e cioè degli ugelli conici e a campana, ha portato a raggiungere prestazioni per questi ugelli molto elevate e prossime ai limiti di queste configurazioni. Per migliorare ulteriormente le prestazioni si rende quindi necessario lo studio di possibili configurazioni nonconvenzionali. La motivazione alla base della ricerca di migliori prestazioni è la richiesta di una riduzione del costo di immissione di carico utile in orbita, e questo sia per sistemi di lancio tradizionali (a perdere) sia per sistemi di lancio totalmente riutilizzabili, siano questi ultimi monostadio o bistadio.

Il limite principale degli ugelli convenzionali è che essi sono caratterizzati da un'unica quota di adattamento. A questo limite ne vanno aggiunti altri. Ad esempio almeno un parziale adattamento alla quota potrebbe essere ottenuto in regime sovraespanso, quando la sovraespansione è tale da provocare la separazione del flusso. Tuttavia l'instabilità del flusso separato fa sì che oggi non si considera accettabile il funzionamento di ugelli con flusso separato (almeno in condizioni stazionarie). Bisogna inoltre considerare che solo ugelli convenzionali di grandi dimensioni sono in grado di fornire gli elevati rapporti d'espansione richiesti per aumentare l'impulso specifico nel vuoto. Un parziale superamento di tali limiti è oggi allo studio con lo sviluppo di ugelli convenzionali con sistemi per il controllo della separazione e con sistemi a geometria variabile (per esempio sistemi a coni allungabili o *extendible cones*).

Configurazioni non convenzionali permettono invece di aggirare alcuni limiti degli ugelli non convenzionali. Ad esempio gli ugelli ad espansione esterna come gli ugelli a spina (*plug nozzle* o *aerospoke*) o ugelli a espansione-deflessione (Fig. 16.7) permettono un adattamento alla quota di lavoro (al di sotto di quella di progetto) grazie all'interazione con l'aria esterna. Le principali configurazioni studiate sono:

A.) Ugelli che si adattano alla quota di lavoro:

- Ugelli a spina
- Ugelli a espansione-deflessione

L'interazione con l'aria esterna cambia il rapporto di espansione dell'ugello.

B.) Ugelli con diverse modalità di funzionamento:

- Ugelli a doppia campana
- Ugelli a doppio funzionamento

consentono il funzionamento adattato a due diverse quote mediante opportune combinazioni di geometrie e propellenti.

16.4 Ugelli reali

Nei paragrafi precedenti sono stati esaminati alcuni aspetti dapprima trascurati nella modellizzazione di ugello ideale. In realtà questi e altri fenomeni considerati trascurabili nella modellizzazione hanno un ruolo importante nella progettazione. Essi sono:

- Divergenza del flusso nella sezione di uscita;
- Rapporto di contrazione del convergente e possibili perdite di pressione totale;
- Strato limite (perdite per attrito $\sim 0.5-1.5\%$);

- Particelle solide e goccioline (perdite fino al 5%);
- Instabilità di combustione;
- Reazioni chimiche;
- Funzionamento durante i transitori;
- Raffreddamento.

Domande di verifica

16.1 Cosa si intende per velocità limite di efflusso di un ugello?

16.2 Da cosa dipende la velocità limite?

16.3 Qual'è la relazione tra velocità di efflusso e velocità limite?

16.4 Perché negli endoreattori si considerano sempre ugelli supersonici?

16.5 Qual'è la relazione tra portata e pressione in camera di combustione?

16.6 Scrivere l'espressione della portata in un ugello supersonico ideale (cioè isentropico e saturato) in funzione delle caratteristiche del fluido propulsivo e delle grandezze in camera di combustione.

16.7 Qual'è la definizione di coefficiente di spinta?

16.8 Qual'è la definizione di velocità caratteristica?

16.9 Scrivere l'espressione dell'impulso specifico in funzione della velocità caratteristica e del coefficiente di spinta.

16.10 Da quali grandezze dipende il coefficiente di spinta?

16.11 Qual'è l'effetto di un aumento della temperatura in camera di combustione sull'impulso specifico? Quello di un aumento della pressione in camera di combustione? e quello di un aumento del peso molecolare medio della miscela?

16.12 Qual'è l'effetto di un aumento della temperatura in camera di combustione sulla spinta? Quello di un aumento della pressione in camera di combustione? e quello di un aumento del peso molecolare medio della miscela?

16.13 Qual'è il limite degli ugelli conici? Quando si possono rivelare vantaggiosi?

16.14 Qual'è il rapporto di espansione che massimizza il coefficiente di spinta di un endoreattore operante nell'atmosfera?

16.15 In base a quali considerazioni viene scelto il rapporto di espansione dell'ugello di un endoreattore operante nel vuoto?

16.16 Perché per gli endoreattori termici a fissione nucleare è stato considerato l'idrogeno come fluido propulsivo?

- 16.17** Quali dei parametri di prestazione (F , I_{sp} , C_F , c^*) dipendono dalla pressione in camera di combustione?
- 16.18** Quali dei parametri di prestazione (F , I_{sp} , C_F , c^*) dipendono dalla pressione ambiente?
- 16.19** Quali dei parametri di prestazione (F , I_{sp} , C_F , c^*) dipendono dalla temperatura in camera di combustione?
- 16.20** Quali dei parametri di prestazione (F , I_{sp} , C_F , c^*) dipendono dal peso molecolare medio del fluido propulsivo?
- 16.21** Quali dei parametri di prestazione (F , I_{sp} , C_F , c^*) dipendono dal rapporto dei calori specifici γ ?
- 16.22** Quali dei parametri di prestazione (F , I_{sp} , C_F , c^*) dipendono dal rapporto d'area A_e/A_t ?

Esercizi svolti

- 16.1** Un endoreattore con un ugello convergente con sezione minima di 10 cm di diametro produce una spinta pari a 13 kN quando viene provato a livello del mare. Calcolare la pressione in camera di combustione, supponendo che essa sia superiore a 200 kPa. Si consideri $\gamma = 1.3$. Quanto vale la spinta impulsiva? e quella di pressione?

SOLUZIONE

$$F = \dot{m}_p u_e + (p_e - p_a) A_e$$

$$p_c/p^* = (1 + \delta)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 1.83$$

$$p^* > p_a \Rightarrow \text{ugello saturato } A_e = A_t, p_e = p^*, u_e = a^*$$

$$F = [\rho^*(a^*)^2 + p^* - p_a] A_t \quad \text{ma} \quad a^2 = \gamma p / \rho$$

$$F/A_t = (\gamma + 1)p^* - p_a \Rightarrow p^* = 764 \text{ kPa}; \quad p_c = 1400 \text{ kPa}$$

$$\text{Spinta impulsiva } F_{imp} = \dot{m}_p u_e = \gamma p^* A_t = 7800 \text{ N}$$

$$\text{Spinta di pressione } F_{pres} = (p_e - p_a) A_e = (p^* - p_a) A_t = 5200 \text{ N}$$

- 16.2** Un endoreattore ad idrogeno ed ossigeno liquidi consuma 40 kg di H_2 ogni secondo. Il rapporto di miscela tra ossidante e combustibile è di 5 kg di O_2 per ogni kg di H_2 . La temperatura totale dei gas prodotti dalla combustione è di 3000 K e la pressione totale nell'ugello (adiabatico e isentropico) è di 10 MPa. Assumendo per la miscela dei prodotti della combustione $\gamma = 1.2$ e $R = 690 \text{ J/kg/K}$ si calcoli (a) la spinta fornita dall'endoreattore a livello del mare ($p_a = 100 \text{ kPa}$) nel caso di ugello convergente; (b) la spinta nel caso di ugello adattato; (c) assumendo $Q_p = 12.5 \text{ MJ/kg}$ calcolare P_{av} , P_j , P_p , P_d nel caso di $V = 0$ e di $V = 1000 \text{ m/s}$.

SOLUZIONE

$$(a) \text{ Poiché } p_0/p_a = 100 \text{ l'ugello è saturato quindi } F = \dot{m}_p a^* + (p^* - p_a) A_t.$$

$$\text{Dai dati si ha che } \dot{m}_p = \dot{m}_{H_2} + \dot{m}_{O_2} = 6 \cdot (\dot{m}_{H_2}) = 240 \text{ kg/s.}$$

$$\text{Inoltre: } p^* = 5.645 \text{ MPa}; T^* = 2727 \text{ K}; \rho^* = 3 \text{ kg/m}^3; a^* = 1503 \text{ m/s.}$$

$$\text{Quindi } A_t = \dot{m}_p / (\rho^* a^*) = 0.0532 \text{ m}^2.$$

$$\text{La spinta è: } F = (360.7 + 295.2) \text{ kN} = 655.9 \text{ kN con } u_{eq} = 2733 \text{ m/s}$$

- (b) La spinta è $F = \dot{m}_p u_e$ dove \dot{m}_p è quella già calcolata essendo l'ugello saturato. Si calcola il Mach nella sezione di uscita, sapendo che deve essere $p_e = p_a$:

$$p_0/p_e = 100 = (1 + \delta M_e^2)^{\gamma/(\gamma-1)} \Rightarrow M_e = 3.398.$$

$$\text{Di qui: } T_e = 1392 \text{ K}; a_e = 1074 \text{ m/s}; u_e = 3648 \text{ m/s e } F = 875.5 \text{ kN} \\ (+33.5\% \text{rispetto ad (a)}).$$

(c)

$$- P_{av} = 3.0 \text{ GW (3.12 GW se } V = 1000 \text{ m/s)}$$

$$- P_d = 1.6 \text{ GW (0.84 GW se } V = 1000 \text{ m/s)}$$

$$- P_p = 0.0 \text{ GW (0.87 GW se } V = 1000 \text{ m/s)}$$

$$- P_j = 1.6 \text{ GW (1.71 GW se } V = 1000 \text{ m/s)}$$

- 16.3** Determinare l'area della sezione di gola, l'area della sezione di efflusso, il coefficiente di spinta e la velocità caratteristica dell'ugello di un endoreattore che nel funzionamento adattato al livello del mare fornisce spinta pari a 500 kN e impulso specifico pari a 300 s. Il propellente ha peso molecolare pari a $M = 15 \text{ kmol/kg}$ e $\gamma = 1.4$ e la temperatura di combustione è $T_c = 3300 \text{ K}$.

SOLUZIONE

Essendo noti spinta e impulso specifico si può calcolare da queste la portata di propellente:

$$\dot{m} = F / (g_0 I_{sp}) = 169.9 \text{ kg/s.}$$

Ricordando l'espressione della portata ($\dot{m} = \Gamma p_c A_t / \sqrt{RT_c}$) si osserva che per calcolare A_t l'unico dato mancante è p_c , essendo γ un dato del problema,

$$\Gamma = \sqrt{\gamma \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}} = 0.684; e$$

$$R = \mathcal{R}/M = 8314/15 = 554.3 \text{ J/K/kg}$$

$$\text{Per calcolare } p_c \text{ si ricorda che } u_e = u_{lim} \sqrt{1 - (p_e/p_c)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

$$\text{e quindi } u_{lim} = \sqrt{2\gamma RT_c / (\gamma - 1)} = 3578 \text{ m/s,}$$

$$u_e = g_0 I_{sp} = 2943 \text{ m/s e } p_c/p_e = 51.96$$

$$\text{Essendo } p_e = p_a = 100 \text{ kPa si ottiene } p_c = 5.196 \text{ MPa e } A_t = 0.0646 \text{ m}^2$$

Per calcolare A_e bisogna conoscere M_e , che si può ottenere dal rapporto

$$p_c/p_e = (1 + \delta M_e^2)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

$$\text{Si ha quindi } M_e = 3.234 \text{ e, dalla legge delle aree, } A_e = 0.3416 \text{ m}^2$$

Il coefficiente di spinta si ottiene facilmente come:

$$C_F = F / (p_c A_t) = 1.49$$

e la velocità caratteristica:

$$c^* = \sqrt{RT_c/\Gamma} = 1975 \text{ m/s}$$

- 16.4** Calcolare la spinta fornita dall'endoreattore dell'esercizio precedente quando la pressione atmosferica è scesa a $p_a = 0.03 \text{ MPa}$ e confrontarla con quella ottenuta con un ugello identico in tutto tranne che per la sezione di efflusso, progettata perché sia adattato $p_a = 0.03 \text{ MPa}$. Come variano rispetto all'esercizio precedente la velocità caratteristica e il coefficiente di spinta?

SOLUZIONE

A causa delle diverse condizioni dell'ambiente bisognerà considerare anche la spinta di pressione, dove $p_e = 0.1 \text{ MPa}$ (vedi esercizio precedente):

$$F_1 = \dot{m}u_e + (p_e - p_a)A_e = F_0 + (p_e - p_a)A_e = 523.9 \text{ kN}$$

essendo $F_0 = \dot{m}u_e = 500 \text{ kN}$ la spinta ottenuta nell'esercizio precedente. Per calcolare la spinta dell'ugello modificato, si osserva che la pressione in camera, le caratteristiche del fluido propulsivo, la temperatura in camera di combustione e l'area di gola sono le stesse dell'esercizio precedente. Cambia invece l'area della sezione di efflusso, per permettere la maggiore espansione del getto. Essendo noto il rapporto p_c/p_e si può calcolare M_e e quindi A_e :

$$M_e = \sqrt{\frac{1}{\delta} \left[\left(\frac{p_c}{p_e} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]} = 4.1$$

$$A_e/A_t = (1/M_e)[(1 + \delta M_e^2)/(1 + \delta)]^{0.5(\gamma+1)/(\gamma-1)} = 11.71$$

Dal valore di p_c/p_e si può risalire al valore di u_e :

$$u_e = u_{lim} \sqrt{1 - (p_e/p_c)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} = 3141 \text{ m/s}$$

$$F_2 = \dot{m}u_e = 169.9 \cdot 3141 = 533600 \text{ N} = 533.6 \text{ kN}$$

Il valore di c^* resta invariato in entrambi i casi rispetto all'esercizio precedente, dipendendo da γ , T_c e R , mentre C_F e I_{sp} variano, rispettivamente:

$$C_{F,1} = 1.56; \quad e \quad C_{F,2} = 1.59$$

$$I_{sp,1} = 314 \text{ s}; \quad e \quad I_{sp,2} = 320 \text{ s}$$

Esercizi proposti

- 16.3** Calcolare spinta, velocità di efflusso efficace, pressione in camera di combustione e impulso specifico di un endoreattore avente velocità caratteristica $c^* = 1220 \text{ m/s}$, coefficiente di spinta $C_F = 1.5$, portata di propellente $\dot{m}_p = 73 \text{ kg/s}$ e area di gola pari $A_t = 0.0248 \text{ m}^2$.

RISULTATI

$$F = 133.6 \text{ kN}; \quad u_{eq} = 1830 \text{ m/s}; \quad p_c = 3.59 \text{ MPa}; \quad I_{sp} = 186.6 \text{ s}.$$

- 16.4** Calcolare la velocità caratteristica di un endoreattore avente le seguenti proprietà:

- Spinta nel vuoto $F_{vac} = 761.2 \text{ kN}$;
- Spinta a livello del mare $F_{sl} = 679.6 \text{ kN}$ (si assuma $p_a = 100 \text{ kPa}$ a livello del mare);

- Pressione in camera di combustione $p_c = 5.85 \text{ MPa}$;
- Impulso specifico nel vuoto $I_{sp,vac} = 279 \text{ s}$;
- Rapporto di espansione $\epsilon = 10.48$.

Si calcoli inoltre il coefficiente di spinta a livello del mare e nel vuoto. Sapendo che $\gamma = 1.24$ e il peso molecolare medio dei prodotti di combustione sia $\mathcal{M} = 21 \text{ kg/kmol}$, si calcoli la temperatura di combustione.

RISULTATI

$$c^* = 1638 \text{ m/s}; \quad C_{F,vac} = 1.67; \quad C_{F,sl} = 1.49; \quad T_c = 2918 \text{ K}.$$

- 16.5** Si consideri un endoreattore termico il cui fluido propulsivo sia caratterizzato da $\gamma = 1.4$, $\mathcal{M} = 2 \text{ kg/kmol}$ (idrogeno) e $T_c = 2200 \text{ K}$. Calcolare impulso specifico e velocità caratteristica sapendo che il rapporto di espansione dell'ugello è $\epsilon = A_e/A_t = 40$ e che il propulsore opera nel vuoto. Qual'è il risparmio di propellente che si ottiene utilizzando un ugello con $\epsilon = 200$ anziché $\epsilon = 40$, per una manovra con $\Delta V = 4000 \text{ m/s}$? Si consideri che il carico utile sia $m_u = 1000 \text{ kg}$ e che la massa del motore sia pari a $m_{s,e1} = 100 \text{ kg}$ nel primo caso e $m_{s,e2} = 120 \text{ kg}$ nel secondo, e che la restante massa strutturale sia proporzionale alla massa di propellente con $\epsilon_{s,p} = m_{s,p}/(m_p + m_{s,p}) = 0.1$, avendo definito la massa strutturale come $m_s = m_{s,p} + m_{s,e}$.
Suggerimento: Per effettuare i calcoli delle masse conviene considerare la massa del motore insieme a quella del carico utile essendo anch'essa nota e indipendente dalla massa di propellente.

RISULTATI:

$$c^* = 4417 \text{ m/s}$$

$$\text{Per } \epsilon = 40: \quad C_F = 1.721, \quad I_{sp} = 775 \text{ s}, \quad m_p = 826 \text{ kg}, \quad m_i = 2018 \text{ kg}$$

$$\text{Per } \epsilon = 200: \quad C_F = 1.765, \quad I_{sp} = 795 \text{ s}, \quad m_p = 811 \text{ kg}, \quad m_i = 2022 \text{ kg}$$

Bisogna notare che il risparmio di propellente è abbastanza piccolo (2%) anche considerando che non c'è stata una diminuzione della massa iniziale, cosa che avrebbe ridotto la massa di propellente necessaria al lancio in orbita del satellite.

- 16.6** Si consideri il propulsore principale del lanciatore europeo Ariane 5. Esso è caratterizzato da: $p_c = 10 \text{ MPa}$, $T_c = 3500 \text{ K}$, $p_e = 20 \text{ kPa}$, $\gamma = 1.2$ e impulso specifico nel vuoto $I_{sp,vac} = 433 \text{ s}$. Calcolare il rapporto tra area di efflusso e area di gola ϵ , il coefficiente di spinta nel vuoto C_F , la velocità caratteristica c^* e il peso molecolare medio della miscela \mathcal{M} .

RISULTATI

$$\epsilon = 41.4; \quad C_F = 1.887; \quad c^* = 2250 \text{ m/s}; \quad \mathcal{M} = 13.7 \text{ kg/kmol}$$

- 16.7** Si consideri il propulsore dell'esercizio precedente. Sapendo che esso fornisce una spinta nel vuoto pari a $F_{vac} = 1120 \text{ kN}$, si calcoli la spinta a livello del mare. Si confrontino inoltre i valori della spinta a livello del mare e nel vuoto con quelli ottenuti sostituendo il divergente dell'ugello con un divergente che rende l'ugello adattato a livello del mare. Confrontare anche i valori di impulso specifico nel vuoto.

RISULTATI

$$\text{Ugello con } p_e = 20 \text{ kPa}: \quad F_{sl} = 871 \text{ kN}; \quad F_{vac} = 1120 \text{ kN}; \quad I_{sp,vac} = 433 \text{ s}.$$

$$\text{Ugello con } p_e = 100 \text{ kPa}: \quad F_{sl} = 975 \text{ kN}; \quad F_{vac} = 1046 \text{ kN}; \quad I_{sp,vac} = 404 \text{ s}.$$



Bibliografia

- [1] M. Di Giacinto. *Dispense del corso di Endoreattori*. Università di Roma “La Sapienza”, Roma.
- [2] P. G. Hill and C. R. Peterson. *Mechanics and Thermodynamics of Propulsion*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, MA, USA, second edition, 1992.
- [3] R. W. Humble, G. N. Henry, and W. J. Larson. *Space Propulsion Analysis and Design*. The McGraw-Hill Companies, Inc., New York, NY, USA, 1995.
- [4] G. P. Sutton. *Rocket Propulsion Elements*. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA, sixth edition, 1992.