Calcolo a fatica di componenti meccanici

Seconda parte

Effetto della tensione media sulla vita a fatica

Come affrontare il progetto di un componente sollecitato contemporaneamente da un carico statico e da una sollecitazione ciclica?

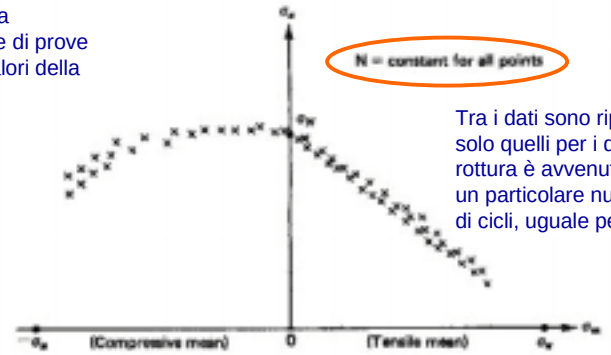
Effetto della tensione media sulla vita a fatica

Le prove di fatica, come si è detto, vengono effettuate in genere con cicli a media nulla (R= –1).

Nella pratica costruttiva accade molto di frequente che le sollecitazioni cicliche siano caratterizzate da una tensione media, non nulla, di trazione o di compressione.

È molto importante, quindi, valutare l'effetto sulla durata di una tensione costante sovrapposta ad una sollecitazione di fatica alterna simmetrica, per la quale sia disponibile la curva di Wöhler.

I dati riportati nella figura rappresentano una serie di prove effettuate con diversi valori della tensione media.



Tra i dati sono riportati solo quelli per i quali la rottura è avvenuta ad un particolare numero di cicli, uguale per tutti.

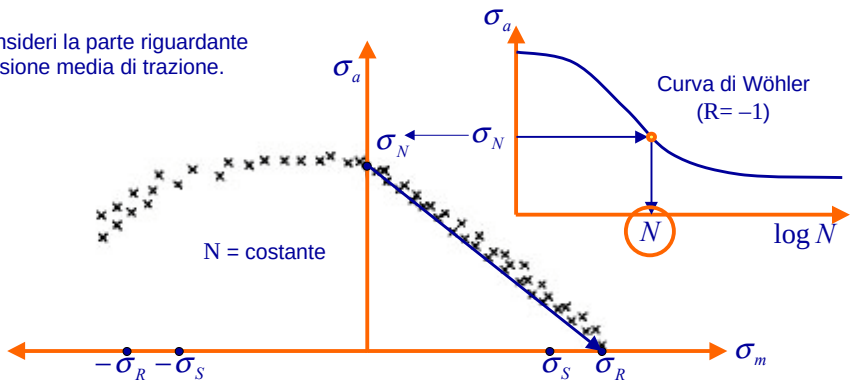
Come si vede la σ_a decresce all'aumentare della tensione media di trazione.

Quando la tensione media è di compressione la σ_a rimane costante per un ampio campo di σ_m prima di sentirne l'effetto e diminuire.

Effetto della tensione media sulla vita a fatica

Si possono immaginare diversi modelli che riproducano il comportamento osservato sperimentalmente.

Si consideri la parte riguardante la tensione media di trazione.

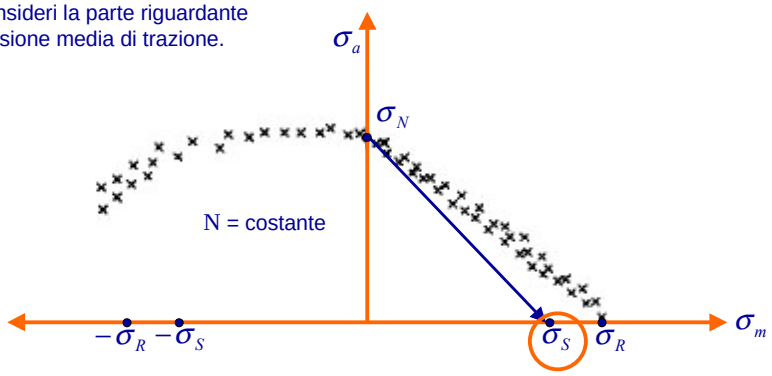


Relazione lineare di Goodman: $$\frac{\sigma_a}{\sigma_N} + \frac{\sigma_m}{\sigma_R} = 1$$

Effetto della tensione media sulla vita a fatica

Si possono immaginare diversi modelli
che riproducano il comportamento osservato sperimentalmente.

Si consideri la parte riguardante
la tensione media di trazione.

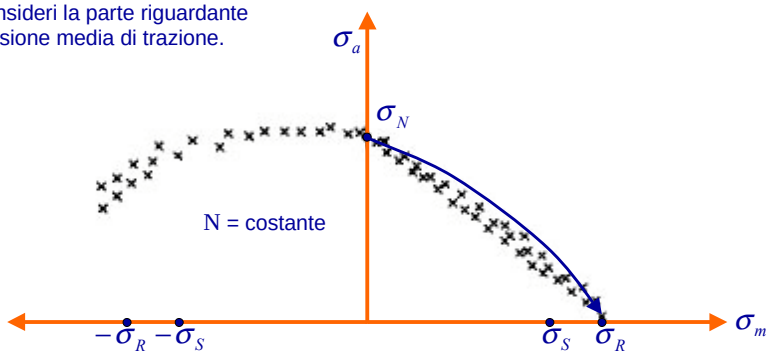


Relazione lineare di Soderberg: $$\frac{\sigma_a}{\sigma_N}+\frac{\sigma_m}{\sigma_S}=1$$

Effetto della tensione media sulla vita a fatica

Si possono immaginare diversi modelli
che riproducano il comportamento osservato sperimentalmente.

Si consideri la parte riguardante
la tensione media di trazione.

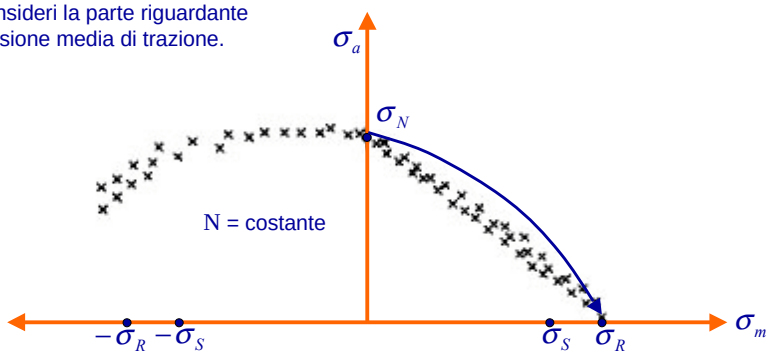


Relazione parabolica di Gerber: $$\frac{\sigma_a}{\sigma_N}+\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_R}\right)^2=1$$

Effetto della tensione media sulla vita a fatica

Si possono immaginare diversi modelli
che riproducano il comportamento osservato sperimentalmente.

Si consideri la parte riguardante
la tensione media di trazione.



Relazione ellittica:

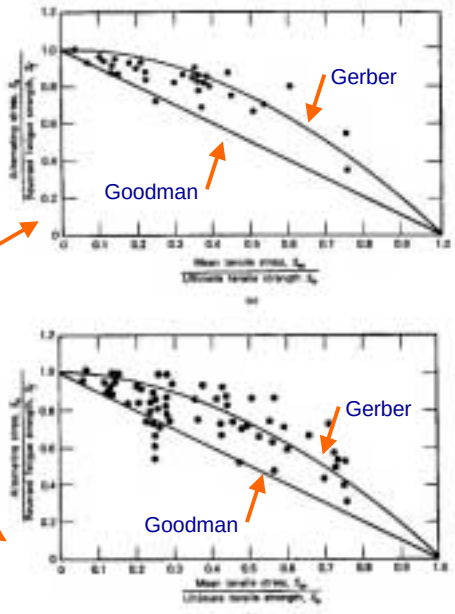
$$\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_N}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_R}\right)^2 = 1$$

Effetto della tensione media sulla vita a fatica

Dati sperimentali relativi
a due diversi materiali
sovrapposti ai modelli
di Goodman e di Gerber.

Acciaio

Alluminio



Effect of mean stress on alternating fatigue strength at long life [14] (reprinted with permission of Pergamon Press Ltd.). (a) Steels based on ~10⁷ cycles. (b) Aluminum alloys based on ~5 × 10⁷ cycles.

Effetto della tensione media sulla vita a fatica

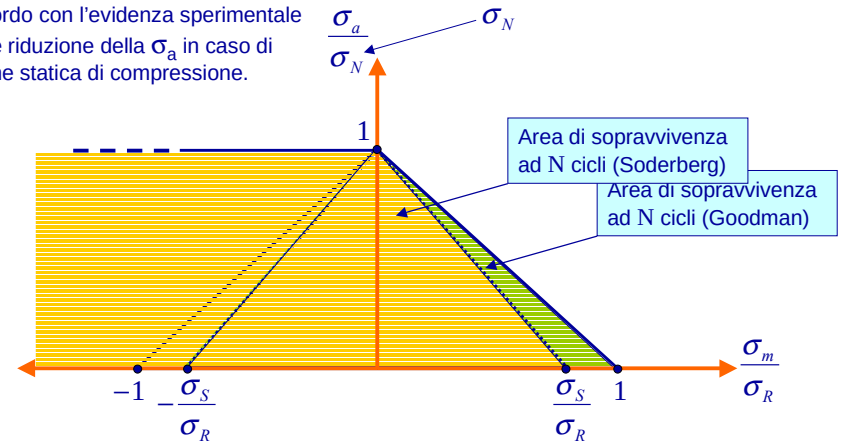
Tra i modelli descritti, si utilizza quello lineare di Goodman perché rappresenta in modo sufficientemente accurato la realtà ed è di semplice applicazione.

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_N} + \frac{\sigma_m}{\sigma_R} = 1$$

È anche utilizzato il modello lineare di Soderberg che ha il vantaggio di essere più conservativo rispetto a quello di Goodman.

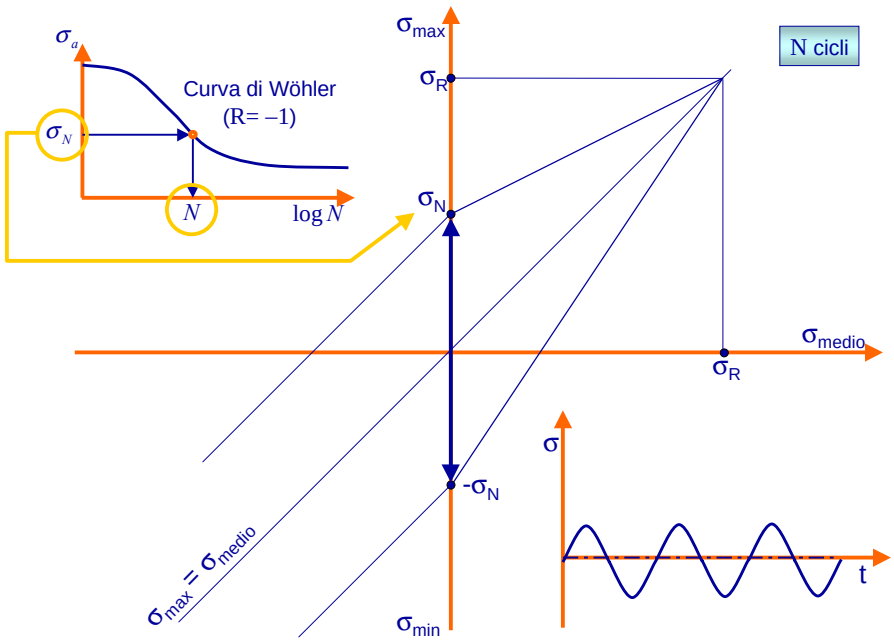
$$\frac{\sigma_a}{\sigma_N} + \frac{\sigma_m}{\sigma_S} = 1$$

In accordo con l'evidenza sperimentale non c'è riduzione della σ_a in caso di tensione statica di compressione.



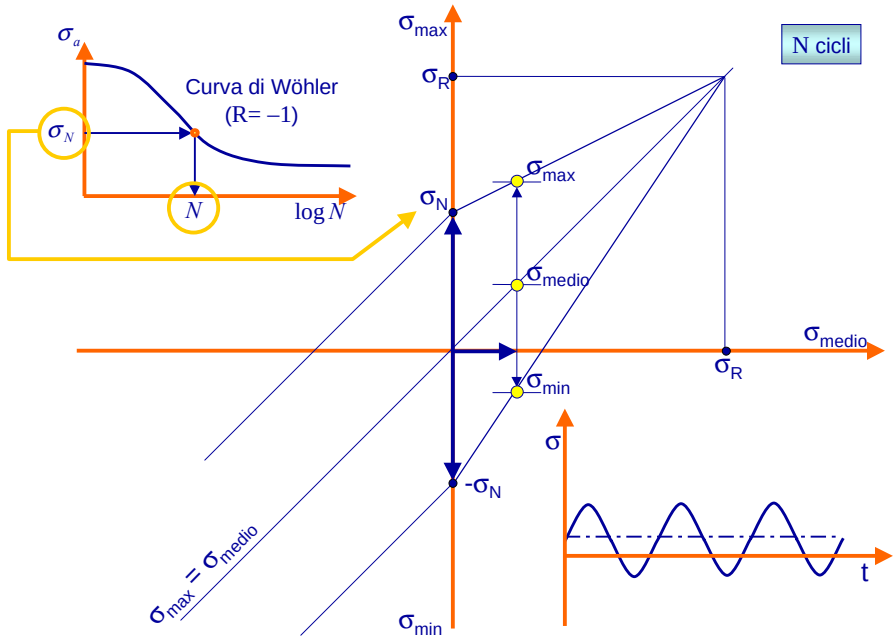
Effetto della tensione media sulla vita a fatica

Il diagramma di Goodman Smith



Effetto della tensione media sulla vita a fatica

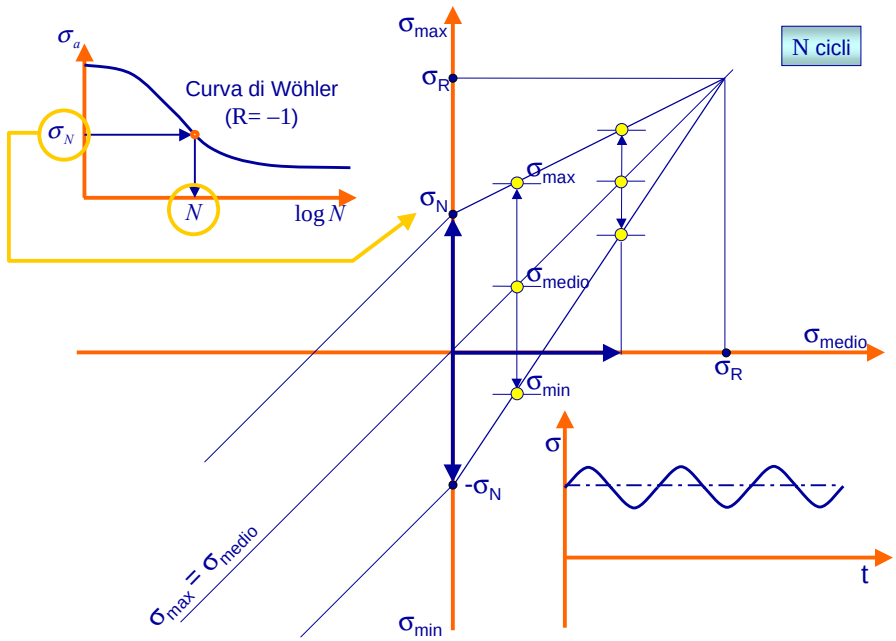
Il diagramma di Goodman Smith



CDM - Fatica

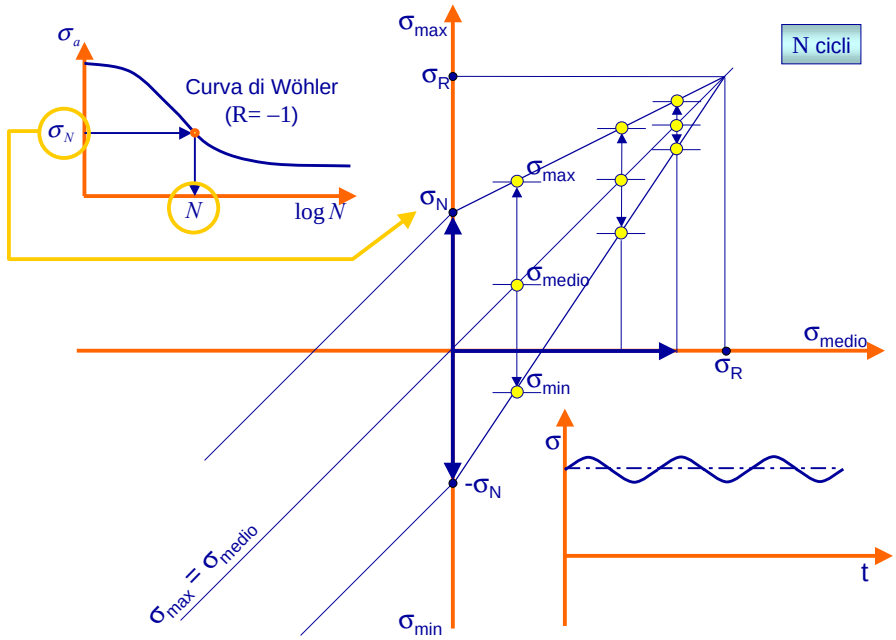
Effetto della tensione media sulla vita a fatica

Il diagramma di Goodman Smith



Effetto della tensione media sulla vita a fatica

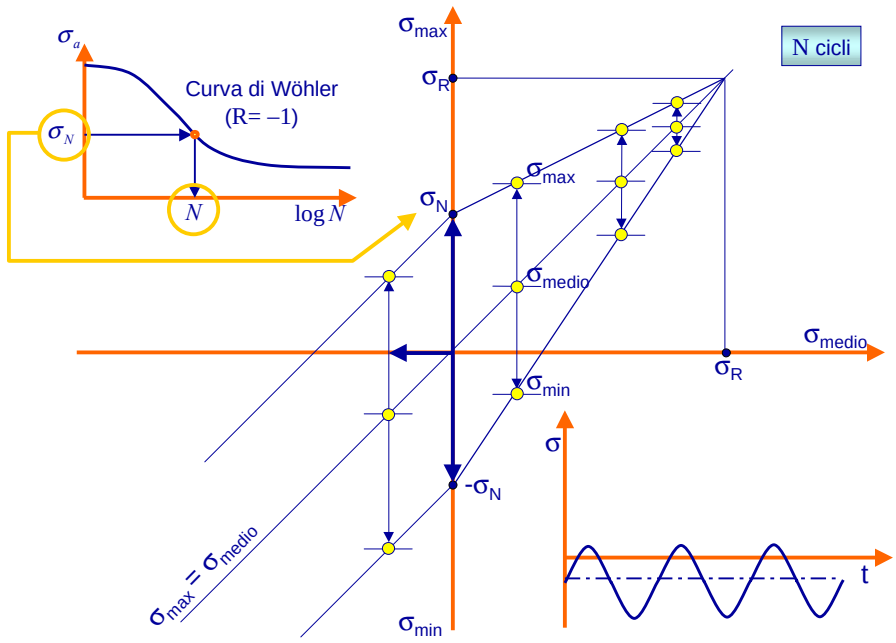
Il diagramma di Goodman Smith



CDM - Fatica

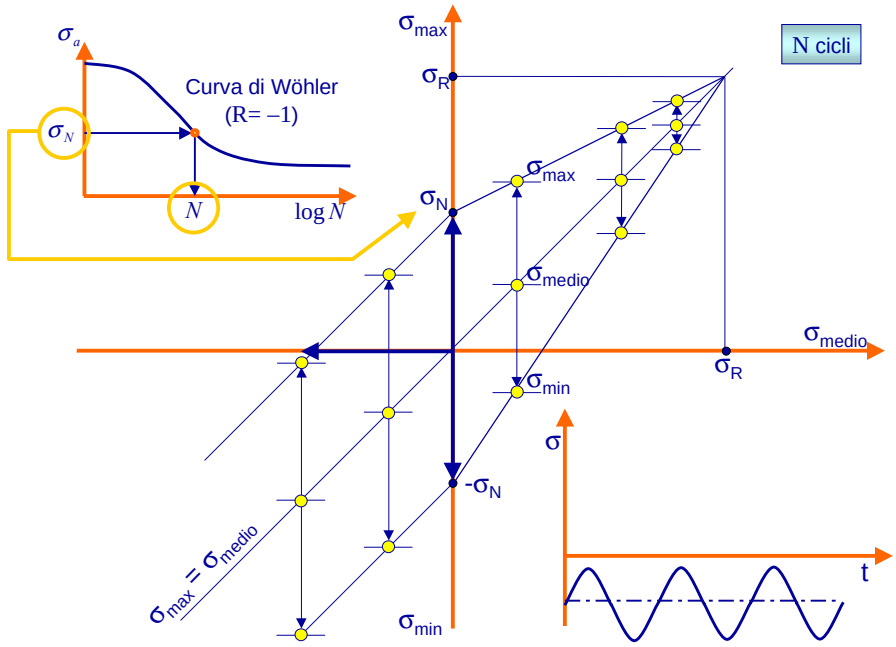
Effetto della tensione media sulla vita a fatica

Il diagramma di Goodman Smith



Effetto della tensione media sulla vita a fatica

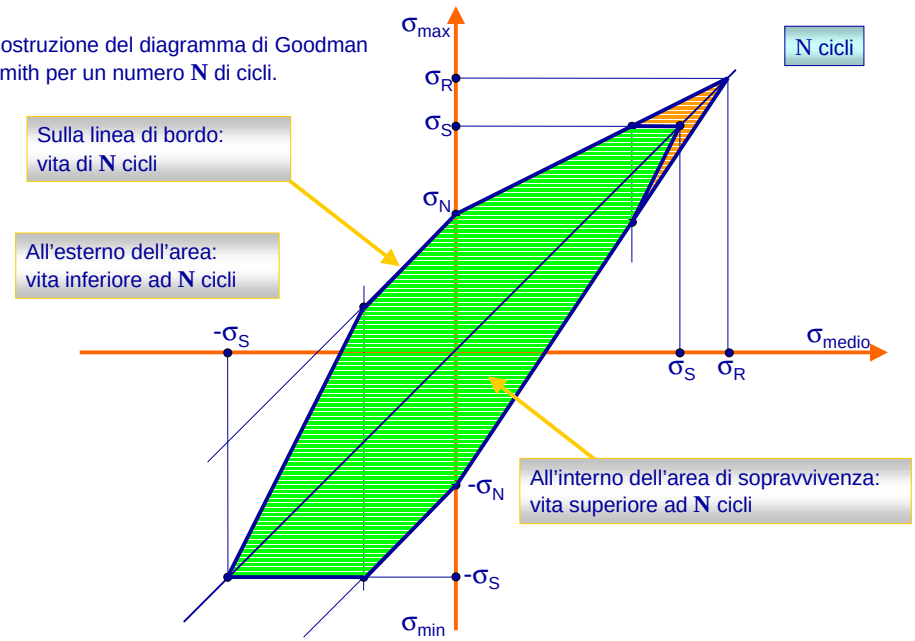
Il diagramma di Goodman Smith



Effetto della tensione media sulla vita a fatica

Il diagramma di Goodman Smith

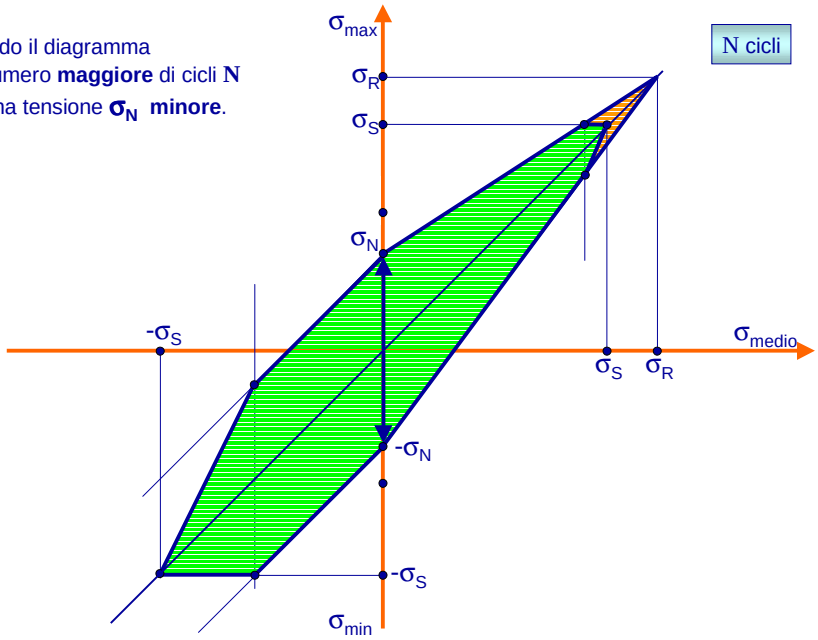
Costruzione del diagramma di Goodman Smith per un numero **N** di cicli.



Effetto della tensione media sulla vita a fatica

Il diagramma di Goodman Smith

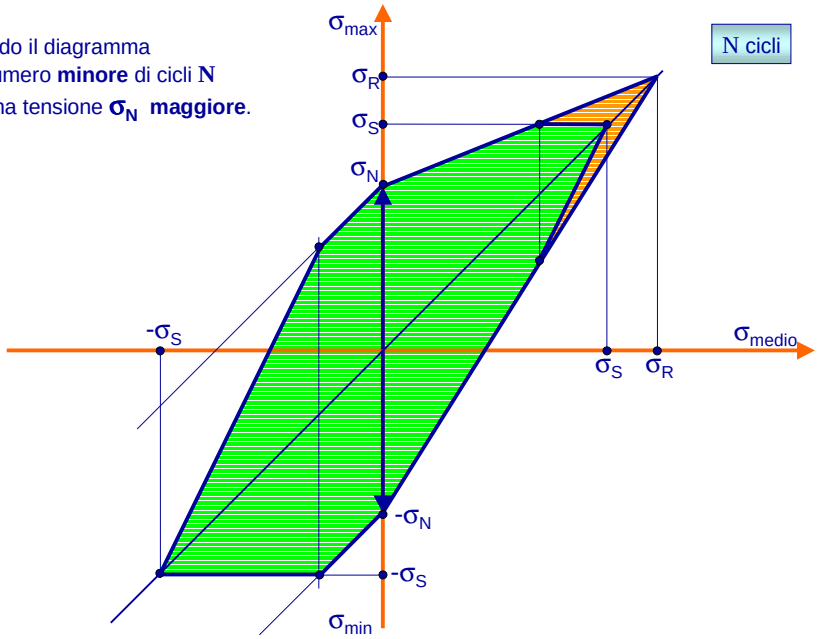
Costruendo il diagramma
per un numero **maggiore** di cicli **N**
si avrà una tensione $\boldsymbol{\sigma_N}$ **minore**.



Effetto della tensione media sulla vita a fatica

Il diagramma di Goodman Smith

Costruendo il diagramma
per un numero **minore** di cicli **N**
si avrà una tensione $\boldsymbol{\sigma_N}$ **maggiore**.

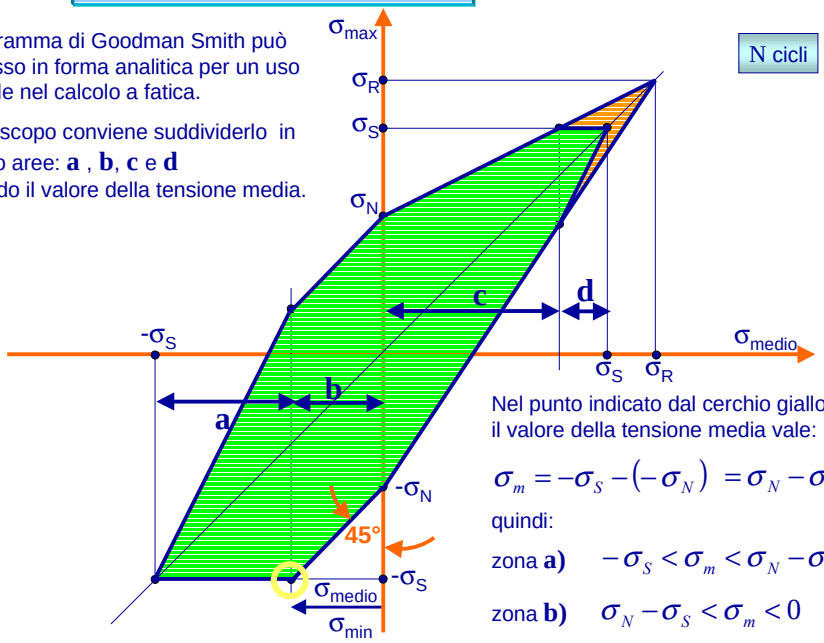


Effetto della tensione media sulla vita a fatica

Il diagramma di Goodman Smith

Il diagramma di Goodman Smith può espresso in forma analitica per un uso agevole nel calcolo a fatica.

A tale scopo conviene suddividerlo in quattro aree: **a** , **b**, **c** e **d** secondo il valore della tensione media.



Nel punto indicato dal cerchio giallo il valore della tensione media vale:

$$\sigma_m = -\sigma_S - (-\sigma_N) = \sigma_N - \sigma_S$$

quindi:

zona **a)** $-\sigma_S < \sigma_m < \sigma_N - \sigma_S$

zona **b)** $\sigma_N - \sigma_S < \sigma_m < 0$

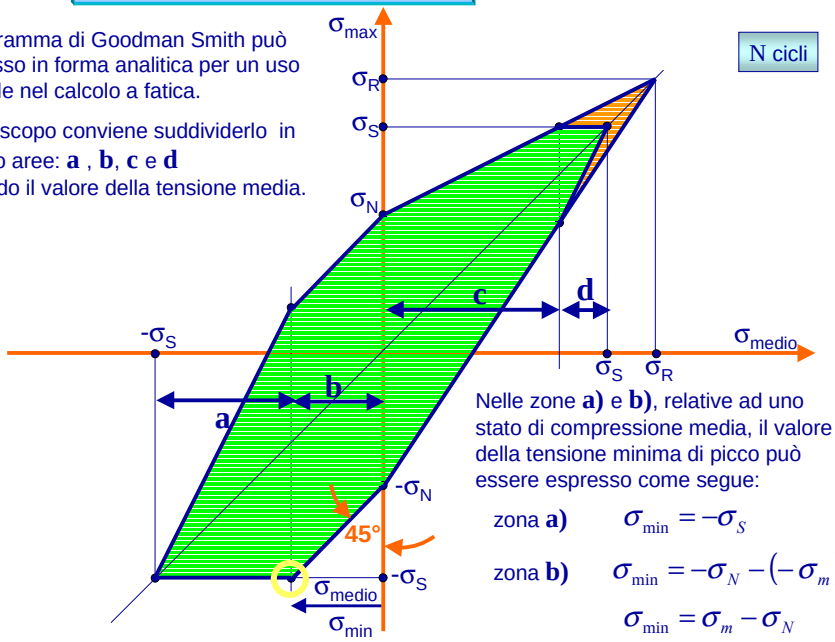
CDM - Fatica

Effetto della tensione media sulla vita a fatica

Il diagramma di Goodman Smith

Il diagramma di Goodman Smith può espresso in forma analitica per un uso agevole nel calcolo a fatica.

A tale scopo conviene suddividerlo in quattro aree: **a** , **b**, **c** e **d** secondo il valore della tensione media.



Nelle zone **a)** e **b)**, relative ad uno stato di compressione media, il valore della tensione minima di picco può essere espresso come segue:

zona **a)** $\sigma_{\min} = -\sigma_S$

zona **b)** $\sigma_{\min} = -\sigma_N - (-\sigma_m)$

$$\sigma_{\min} = \sigma_m - \sigma_N$$

Effetto della tensione media sulla vita a fatica

Il diagramma di Goodman Smith

Il diagramma di Goodman Smith può espresso in forma analitica per un uso agevole nel calcolo a fatica.

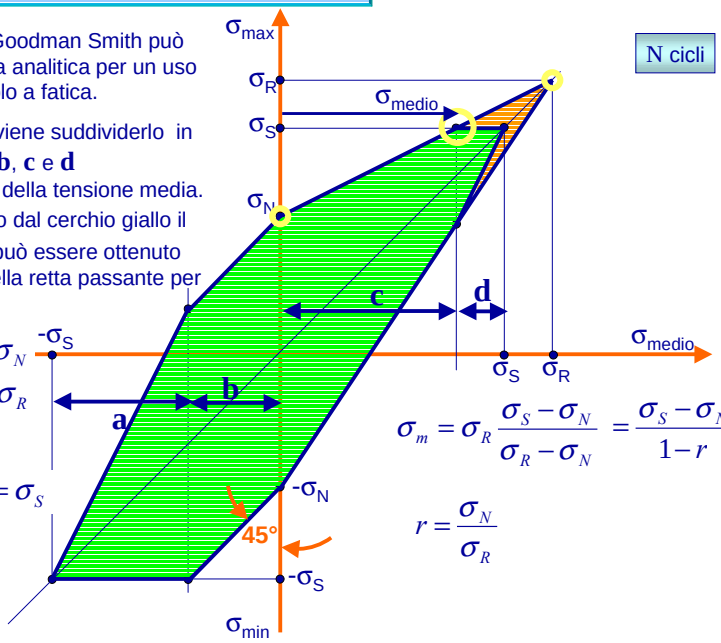
A tale scopo conviene suddividerlo in quattro aree: **a** , **b**, **c** e **d** secondo il valore della tensione media.

Nel punto indicato dal cerchio giallo il valore di σ_{medio} può essere ottenuto dall'equazione della retta passante per i punti:

$$x_1 = 0 \qquad y_1 = \sigma_N$$

$$x_2 = \sigma_R \qquad y_2 = \sigma_R$$

$$x = \sigma_m = ? \qquad y = \sigma_S$$



$$\sigma_m = \sigma_R \frac{\sigma_S - \sigma_N}{\sigma_R - \sigma_N} = \frac{\sigma_S - \sigma_N}{1 - r}$$

$$r = \frac{\sigma_N}{\sigma_R}$$

CDM - Fatica

Effetto della tensione media sulla vita a fatica

Il diagramma di Goodman Smith

Il diagramma di Goodman Smith può espresso in forma analitica per un uso agevole nel calcolo a fatica.

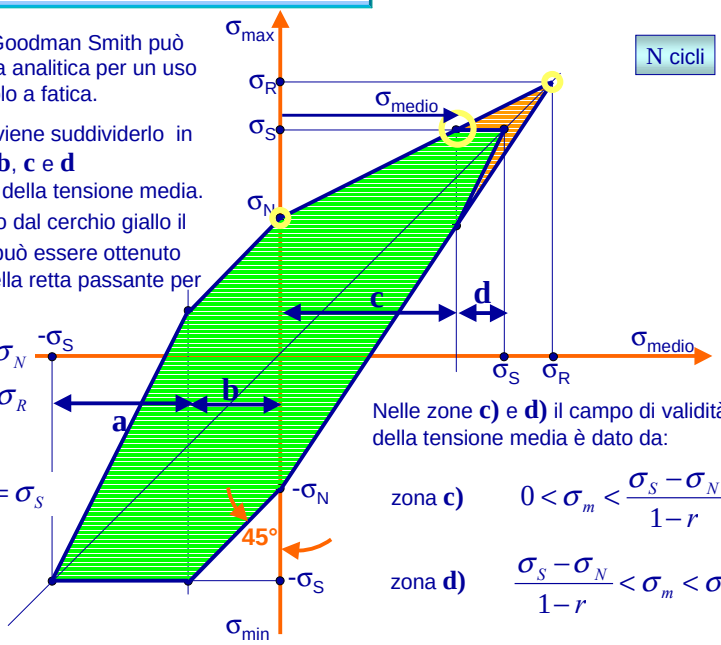
A tale scopo conviene suddividerlo in quattro aree: **a** , **b**, **c** e **d** secondo il valore della tensione media.

Nel punto indicato dal cerchio giallo il valore di σ_{medio} può essere ottenuto dall'equazione della retta passante per i punti:

$$x_1 = 0 \qquad y_1 = \sigma_N$$

$$x_2 = \sigma_R \qquad y_2 = \sigma_R$$

$$x = \sigma_m = ? \qquad y = \sigma_S$$



Nelle zone **c)** e **d)** il campo di validità della tensione media è dato da:

zona **c)** $$0 < \sigma_m < \frac{\sigma_S - \sigma_N}{1 - r}$$

zona **d)** $$\frac{\sigma_S - \sigma_N}{1 - r} < \sigma_m < \sigma_S$$

Effetto della tensione media sulla vita a fatica

Il diagramma di Goodman Smith

Il diagramma di Goodman Smith può espresso in forma analitica per un uso agevole nel calcolo a fatica.

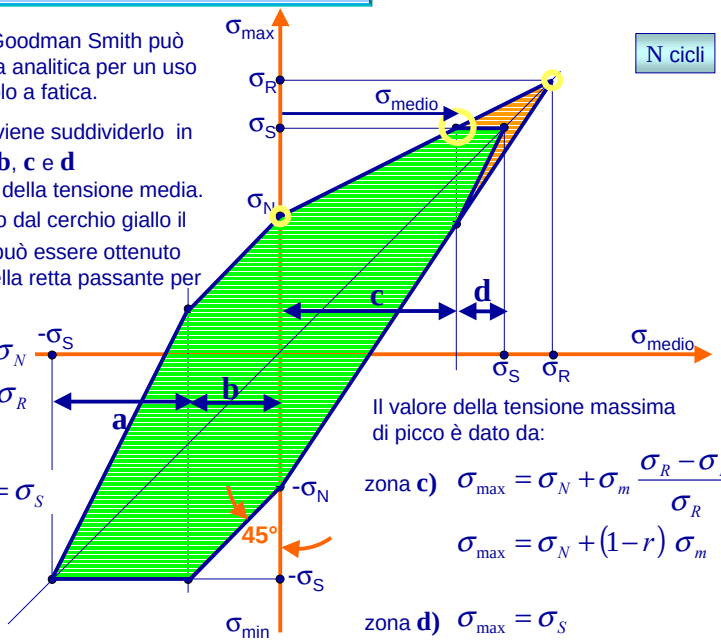
A tale scopo conviene suddividerlo in quattro aree: **a** , **b**, **c** e **d** secondo il valore della tensione media.

Nel punto indicato dal cerchio giallo il valore di σ_{medio} può essere ottenuto dall'equazione della retta passante per i punti:

$$x_1 = 0 \qquad y_1 = \sigma_N$$

$$x_2 = \sigma_R \qquad y_2 = \sigma_R$$

$$x = \sigma_m = ? \qquad y = \sigma_S$$



Il valore della tensione massima di picco è dato da:

zona **c)** $\sigma_{max} = \sigma_N + \sigma_m \dfrac{\sigma_R - \sigma_N}{\sigma_R}$

$$\sigma_{max} = \sigma_N + (1 - r)\,\sigma_m$$

zona **d)** $\sigma_{max} = \sigma_S$

Effetto della tensione media sulla vita a fatica

Il diagramma di Goodman Smith

Riepilogando quanto appena discusso si può scrivere:

	Campo di validità della tensione media	Tensione massima / minima
zona **a)**	$-\sigma_S < \sigma_m < \sigma_N - \sigma_S$	$\sigma_{min} = -\sigma_S$
zona **b)**	$\sigma_N - \sigma_S < \sigma_m < 0$	$\sigma_{min} = \sigma_m - \sigma_N$
zona **c)**	$0 < \sigma_m < \dfrac{\sigma_S - \sigma_N}{1 - r}$	$\sigma_{max} = \sigma_N + (1 - r)\,\sigma_m$
zona **d)**	$\dfrac{\sigma_S - \sigma_N}{1 - r} < \sigma_m < \sigma_S$	$\sigma_{max} = \sigma_S$

Ricordando la definizione di tensione media: $\sigma_m = \dfrac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}$ è possibile riscrivere le due prime relazioni in termini di tensione massima, invece che di tensione minima.

$$\sigma_{min} = 2\sigma_m - \sigma_{max}$$

Effetto della tensione media sulla vita a fatica

Il diagramma di Goodman Smith

Riepilogando quanto appena discusso si può scrivere:

	Campo di validità della tensione media	Tensione massima
zona **a)**	$-\sigma_S < \sigma_m < \sigma_N - \sigma_S$	$\sigma_{\max} - 2\sigma_m = -\sigma_S$
zona **b)**	$\sigma_N - \sigma_S < \sigma_m < 0$	$\sigma_{\max} - \sigma_m = \sigma_N$
zona **c)**	$0 < \sigma_m < \dfrac{\sigma_S - \sigma_N}{1-r}$	$\sigma_{\max} = \sigma_N + (1-r)\,\sigma_m$
zona **d)**	$\dfrac{\sigma_S - \sigma_N}{1-r} < \sigma_m < \sigma_S$	$\sigma_{\max} = \sigma_S$

Effetto della tensione media sulla vita a fatica

Il diagramma di Goodman Smith

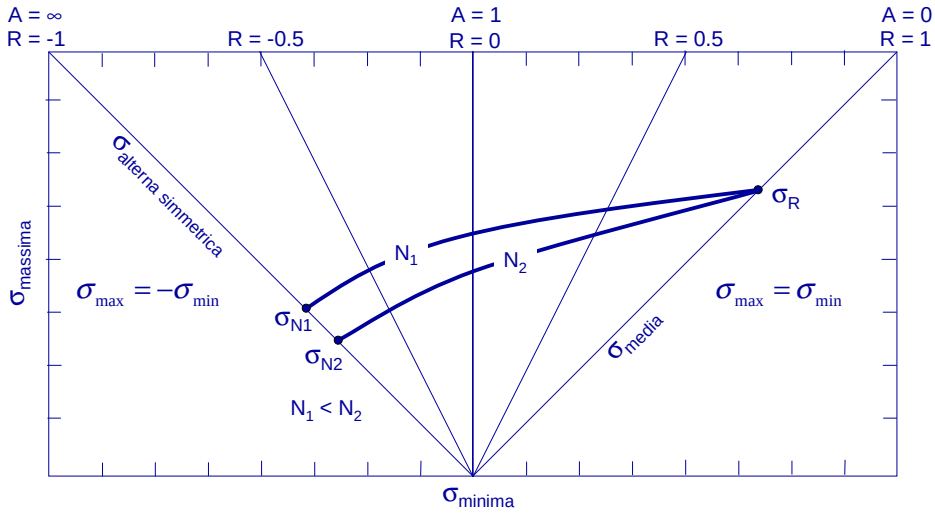
Riepilogando quanto appena discusso si può scrivere:

	Campo di validità della tensione media	Condizione di danneggiamento:
zona **a)**	$-\sigma_S < \sigma_m < \sigma_N - \sigma_S$	$\sigma_{\max} - 2\sigma_m \geq -\sigma_S$
zona **b)**	$\sigma_N - \sigma_S < \sigma_m < 0$	$\sigma_{\max} - \sigma_m \geq \sigma_N$
zona **c)**	$0 < \sigma_m < \dfrac{\sigma_S - \sigma_N}{1-r}$	$\sigma_{\max} \geq \sigma_N + (1-r)\,\sigma_m$
zona **d)**	$\dfrac{\sigma_S - \sigma_N}{1-r} < \sigma_m < \sigma_S$	$\sigma_{\max} \geq \sigma_S$

Effetto della tensione media sulla vita a fatica

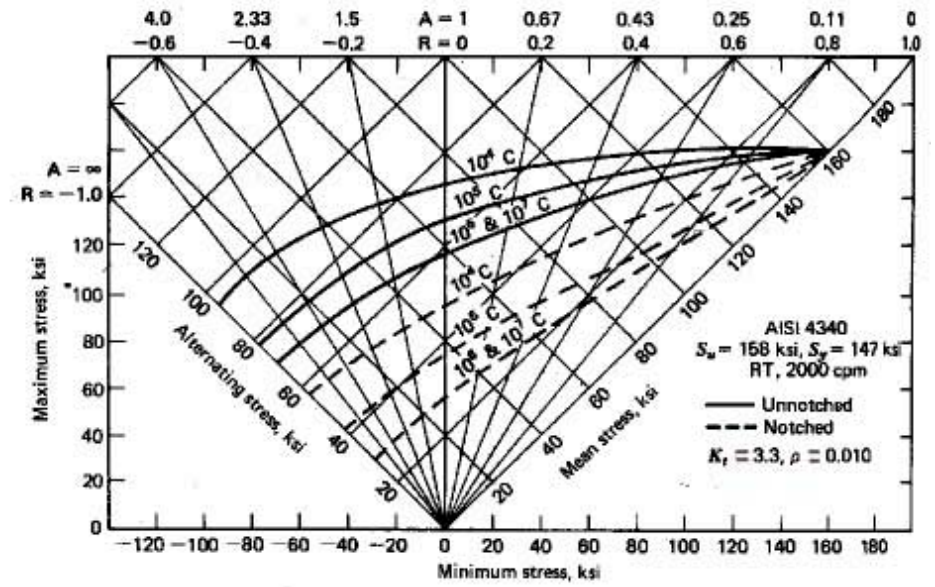
I diagrammi Master (di Weyrauch e Kommerell)

Una diversa forma di presentazione dell'interazione tra resistenza ad una sollecitazione ciclica e ad un carico statico è quella dei cosiddetti "diagrammi Master".



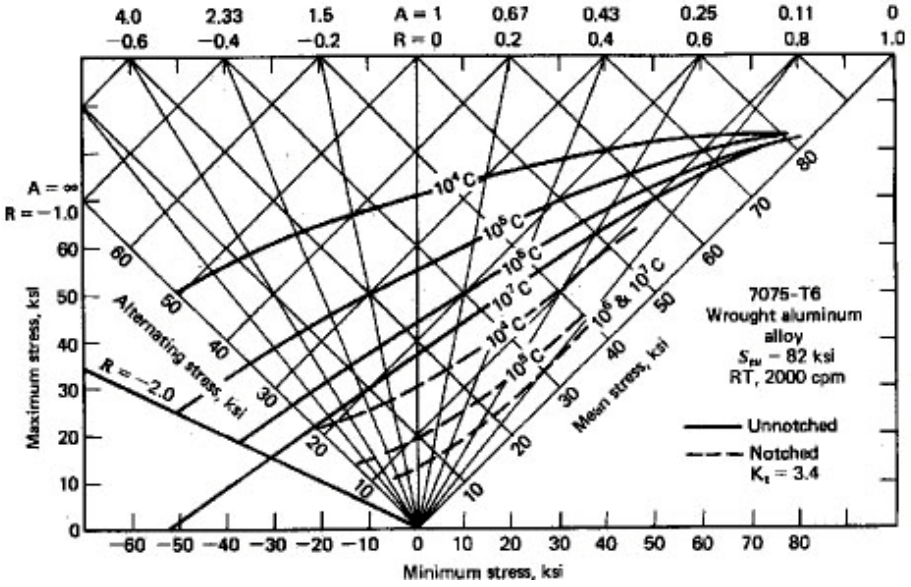
Effetto della tensione media sulla vita a fatica

I diagrammi Master



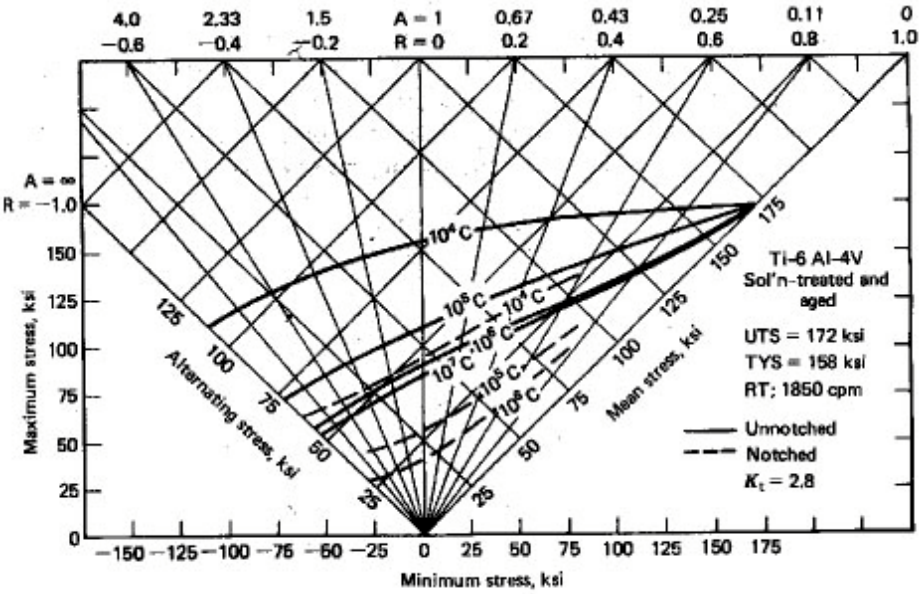
Effetto della tensione media sulla vita a fatica

I diagrammi Master



Effetto della tensione media sulla vita a fatica

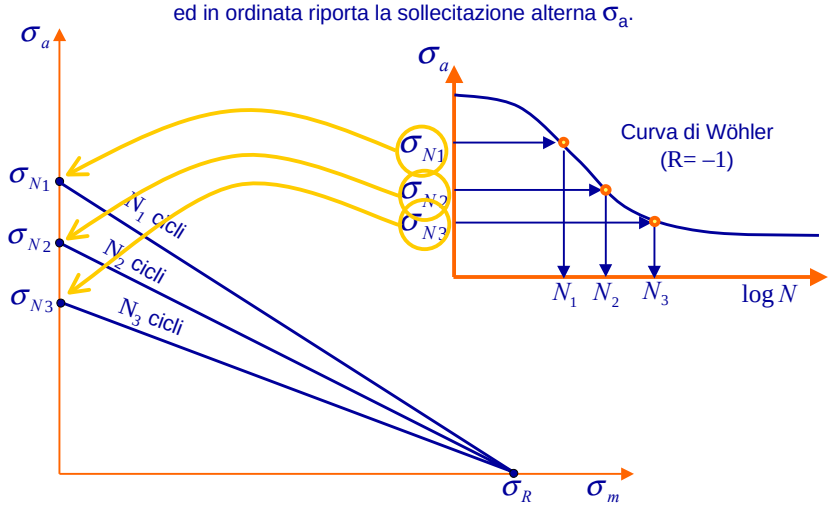
I diagrammi Master



Effetto della tensione media sulla vita a fatica

Il piano di Soderberg

L'interazione tra sollecitazione ciclica e sollecitazione media può essere rappresentata anche in un piano, detto di Soderberg, che in ascissa riporta la tensione media σ_m ed in ordinata riporta la sollecitazione alterna σ_a.



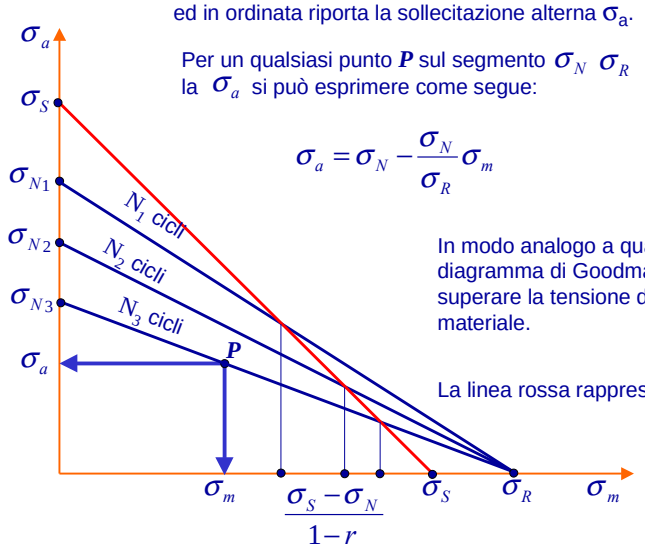
Effetto della tensione media sulla vita a fatica

Il piano di Soderberg

L'interazione tra sollecitazione ciclica e sollecitazione media può essere rappresentata anche in un piano, detto di Soderberg, che in ascissa riporta la tensione media σ_m ed in ordinata riporta la sollecitazione alterna σ_a.

Per un qualsiasi punto ***P*** sul segmento σ_N σ_R la σ_a si può esprimere come segue:

$$\sigma_a = \sigma_N - \frac{\sigma_N}{\sigma_R}\sigma_m$$



In modo analogo a quanto è stato fatto sul diagramma di Goodman Smith si evita di superare la tensione di snervamento del materiale.

La linea rossa rappresenta il limite elastico.

Effetto della tensione media sulla vita a fatica

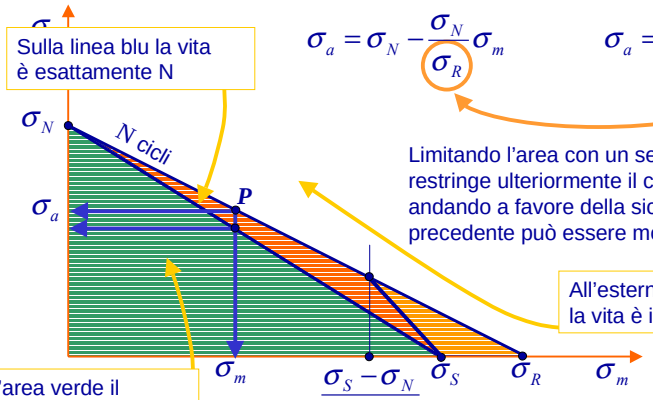
Il piano di Soderberg

L'interazione tra sollecitazione ciclica e sollecitazione media può essere rappresentata anche in un piano, detto di Soderberg, che in ascissa riporta la tensione media σ_m ed in ordinata riporta la sollecitazione alterna σ_a.

Per un qualsiasi punto ***P*** sul segmento $\sigma_N \ \sigma_R$ la σ_a si può esprimere come segue:

$$\sigma_a = \sigma_N - \frac{\sigma_N}{\sigma_R}\sigma_m \qquad \sigma_a = \sigma_N - \frac{\sigma_N}{\sigma_S}\sigma_m$$

Sulla linea blu la vita è esattamente N



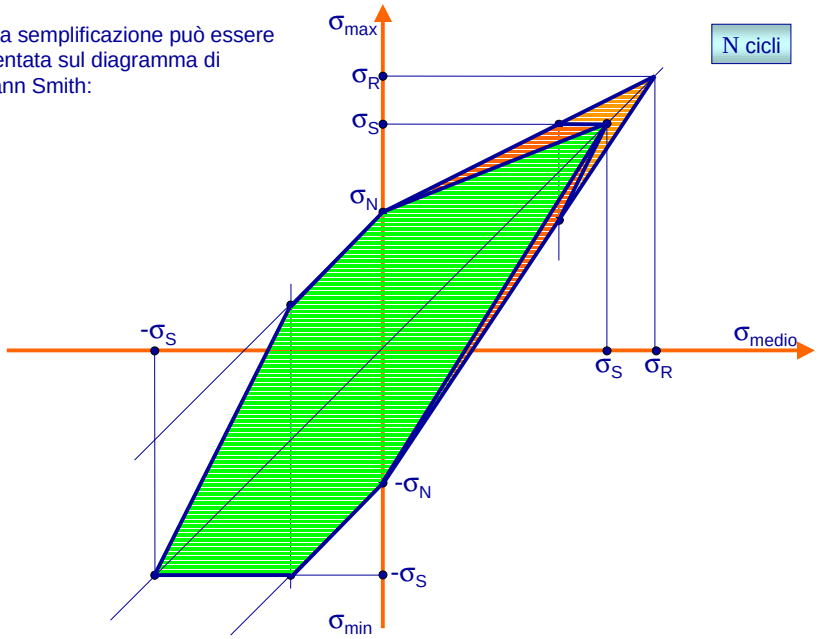
Limitando l'area con un segmento σ_N σ_S si restringe ulteriormente il campo di progetto, andando a favore della sicurezza, e la relazione precedente può essere modificata.

All'esterno della linea blu la vita è inferiore ad N

Nell'area verde il componente ha una vita superiore ad N

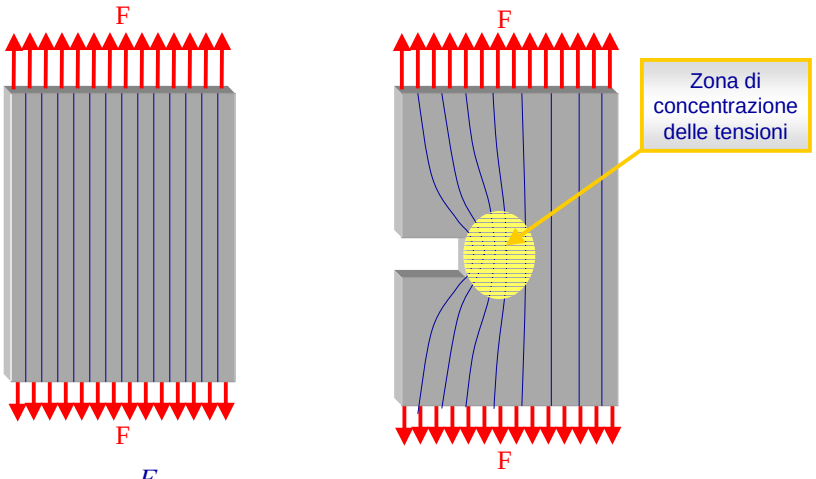
Effetto della tensione media sulla vita a fatica

La stessa semplificazione può essere rappresentata sul diagramma di Goodmann Smith:



Effetto delle concentrazioni di tensione sulla vita a fatica

Le brusche variazioni di forma provocano un aumento locale dello stato tensionale che diventa, localmente, triassiale.



$$\sigma_n = \frac{F}{A}$$

$$\sigma_{locale} = k \cdot \sigma_n$$

$k \Leftarrow$ Forma dell'intaglio

Effetto delle concentrazioni di tensione sulla vita a fatica

Fattore di intaglio

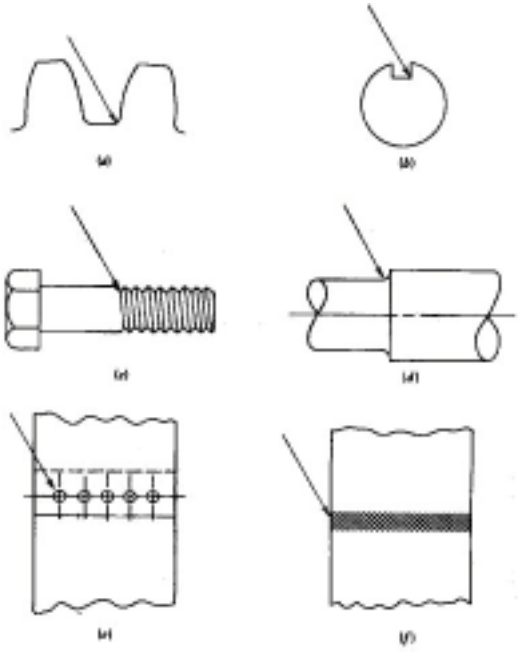
Molti organi meccanici hanno, per motivi funzionali, una forma che provoca effetti locali di intaglio.

Naturalmente si cerca di ridurre al massimo la severità dell'intaglio con raggi di raccordo ampi, per quanto possibile.

Tuttavia, come mostrano gli schizzi in figura, spesso non è possibile evitare le brusche variazioni di forma e la tensione locale può raggiungere valori pari ad oltre 3÷4 volte la tensione nominale.

Fattore di intaglio teorico

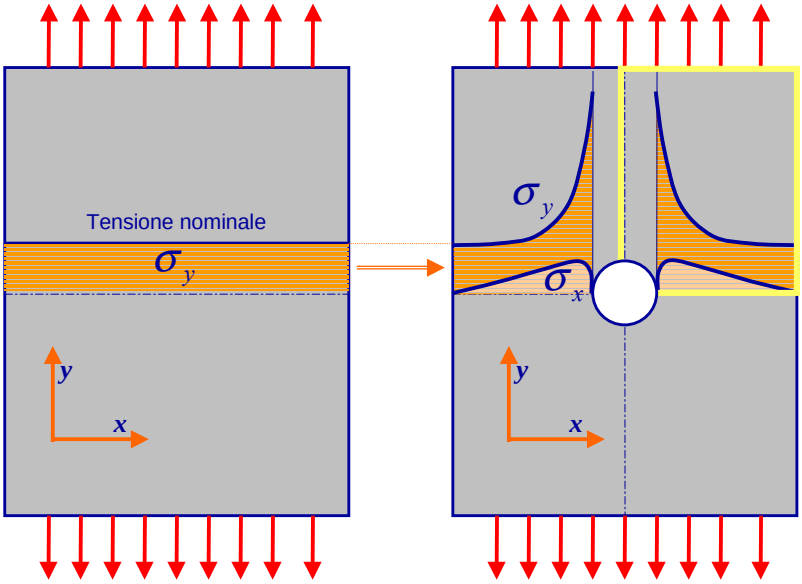
$$K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_n}$$



Effetto delle concentrazioni di tensione sulla vita a fatica

Fattore di intaglio

La presenza di un foro in una piastra di lamiera provoca un'alterazione dello stato tensionale.



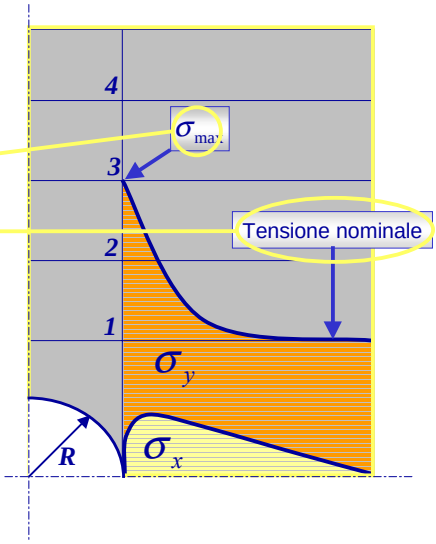
Effetto delle concentrazioni di tensione sulla vita a fatica

Fattore di intaglio

La presenza di un foro in una piastra di lamiera provoca un'alterazione dello stato tensionale.

Nel caso di foro circolare
(di piccole dimensioni rispetto a quelle della piastra)
il fattore di intaglio vale 3.

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_n} = 3$$



Nel caso più generale di lastra piana con un foro ellittico il massimo valore della tensione dipende dal raggio di curvatura minimo dell'ellisse.

$$\sigma_{\max} = \sigma_n \left(1 + 2\frac{a}{b}\right)$$

Il raggio di curvatura minimo dell'ellisse è

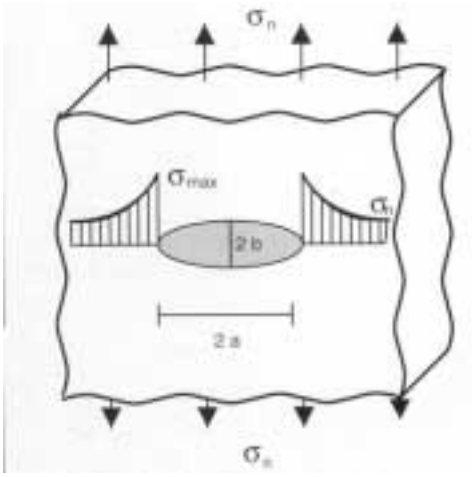
$$\rho = \frac{b^2}{a}$$

per cui si ha:

$$\sigma_{\max} = \sigma_n \left(1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho}}\right)$$

Il fattore di intaglio quindi vale:

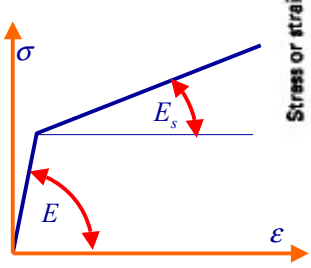
$$K_t = \left(1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho}}\right)$$

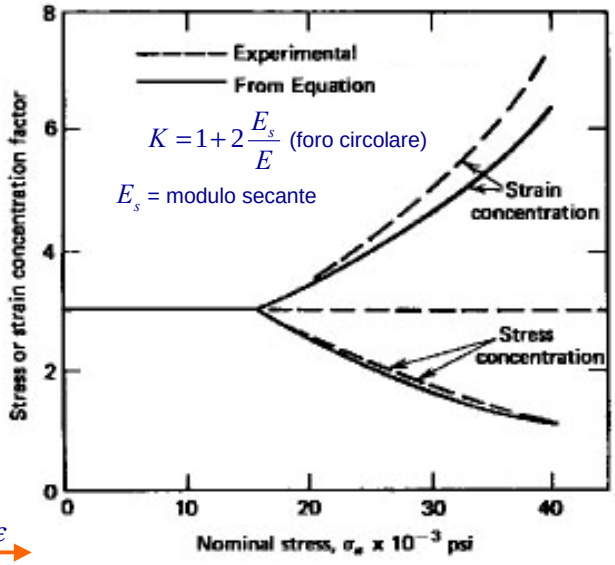


Il comportamento plastico del materiale può ridurre il fattore di concentrazione della tensione.

$$K_P = 1 + (K_t - 1)\frac{E_s}{E}$$

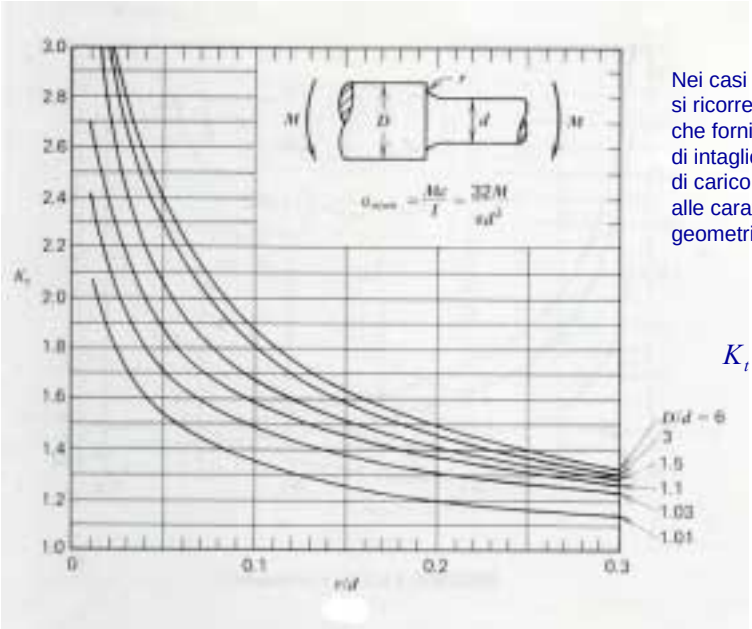
Ne risulta, tuttavia, incrementato il fattore di concentrazione della deformazione.





Effetto delle concentrazioni di tensione sulla vita a fatica

Fattore di intaglio



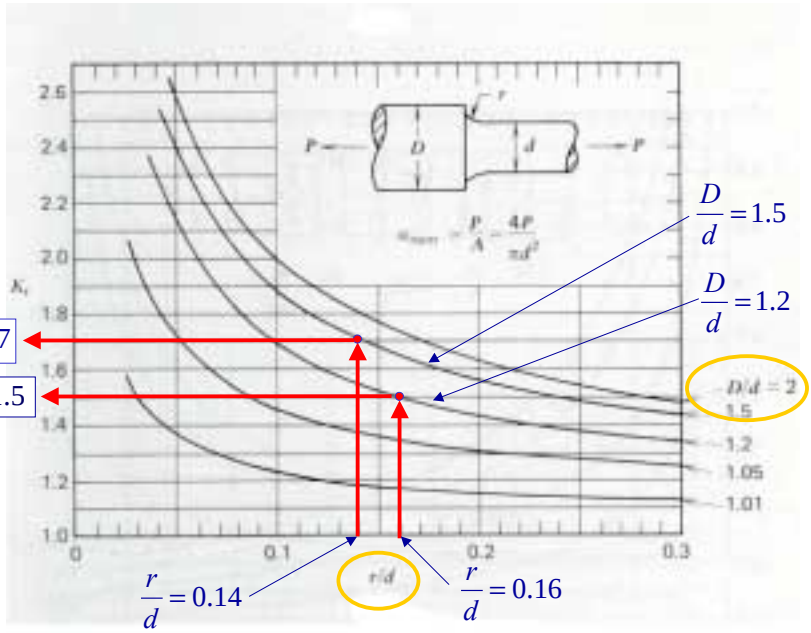
Nei casi più complessi si ricorre a diagrammi che forniscono il fattore di intaglio in base al tipo di carico applicato ed alle caratteristiche geometriche salienti.

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_n}$$

Effetto delle concentrazioni di tensione sulla vita a fatica

Fattore di intaglio

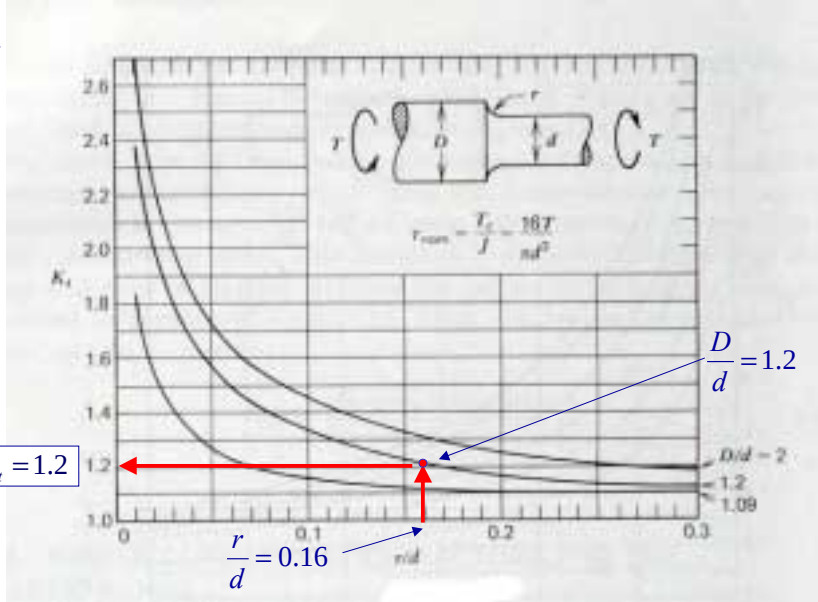
$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_n}$$



Effetto delle concentrazioni di tensione sulla vita a fatica

Fattore di intaglio

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_n}$$



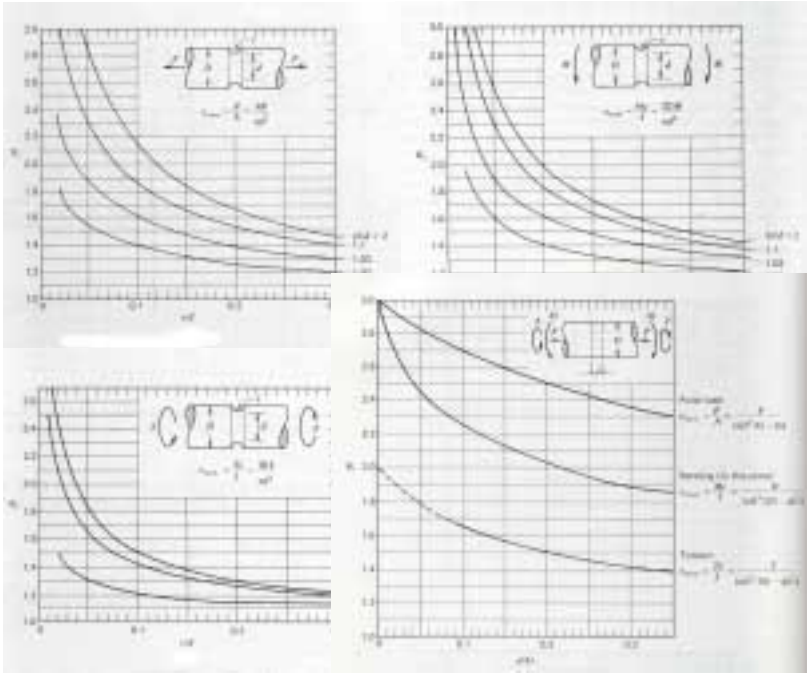
$K_t = 1.2$

$\frac{D}{d} = 1.2$

$\frac{r}{d} = 0.16$

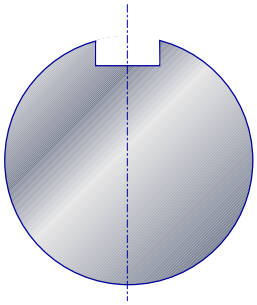
Effetto delle concentrazioni di tensione sulla vita a fatica

Fattori di intaglio



Fattori di intaglio per un albero sede di una cava per chiavette o linguette

Condizione del materiale dell'albero	Tipo di chiavetta o linguetta					
	Incastrata		Dritta		Americana	
	Torsione	Flessione	Torsione	Flessione	Torsione	Flessione
Ricotto	1,3	1,6	1,3	1,3	1,6	2,0
Temprato	1,6	2,0	1,6	1,6	2,4	3,0

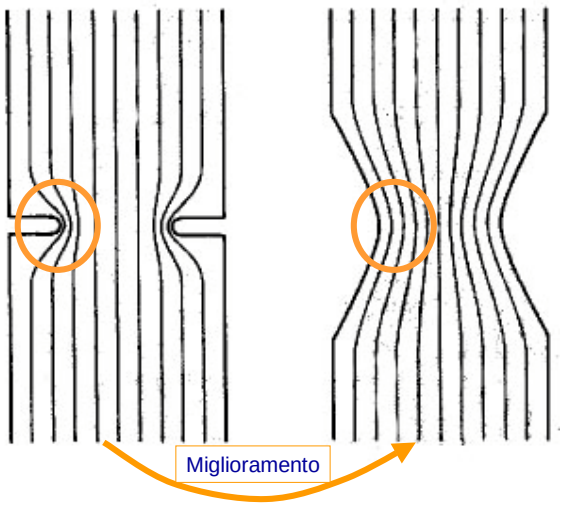


Fattori di intaglio per un albero sede di collegamento forzato

Torsione	Flessione
1,4	1,7

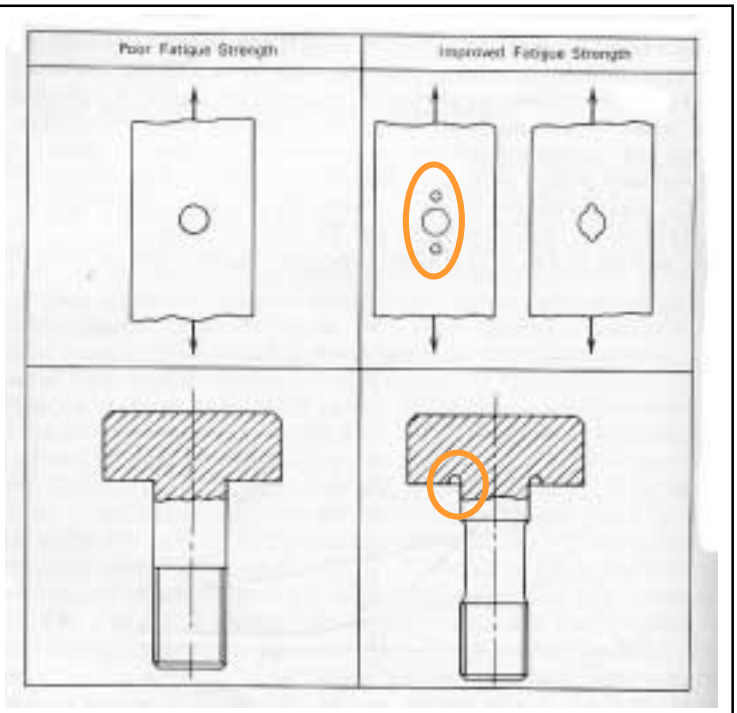
Nel progetto di un componente che sarà sollecitato a fatica è necessario curare il disegno in modo tale che, pur assicurando la funzionalità, sia minimo il fattore di intaglio.

L'intensificazione locale della tensione è maggiore dove le linee isostatiche sono maggiormente addensate.



Effetto delle concentrazioni di tensione sulla vita a fatica

Curare il disegno per rendere minimo il fattore di intaglio.

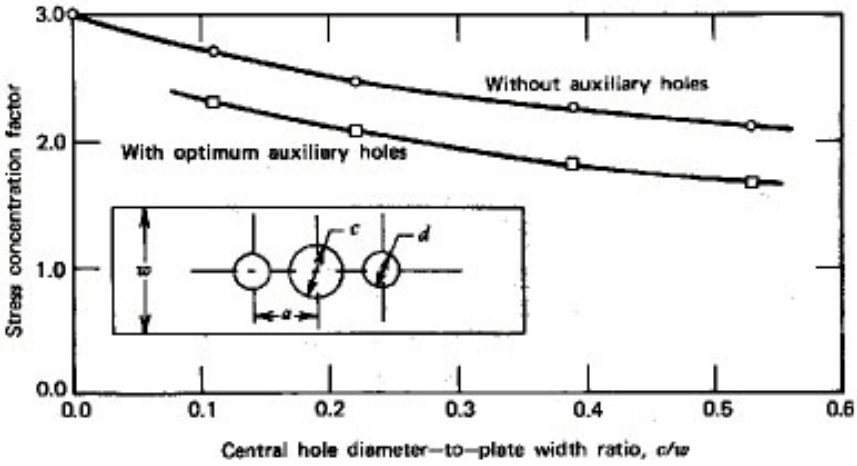


Effetto delle concentrazioni di tensione sulla vita a fatica

Fattore di intaglio

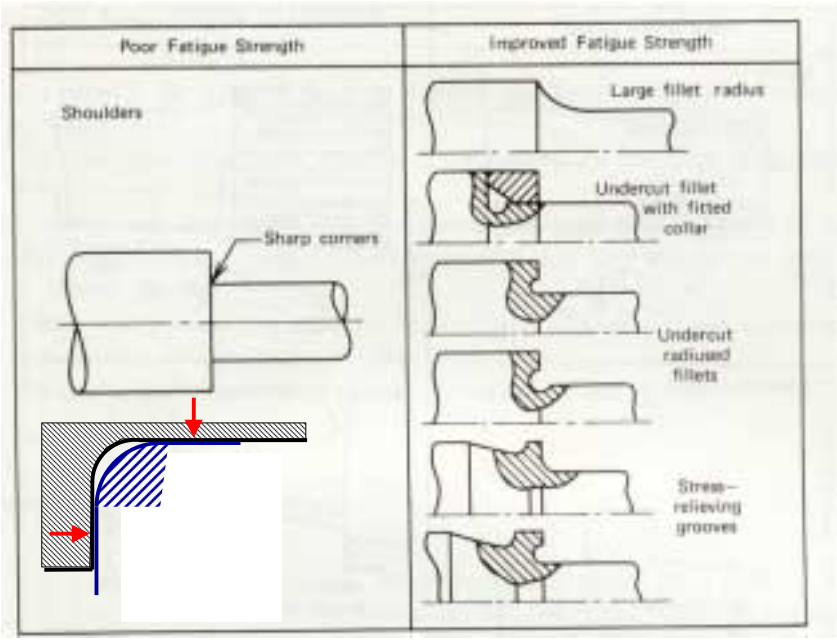
Curare il disegno per rendere minimo il fattore di intaglio.

Effetto dei fori ausiliari sul fattore di intaglio.



Effetto delle concentrazioni di tensione sulla vita a fatica

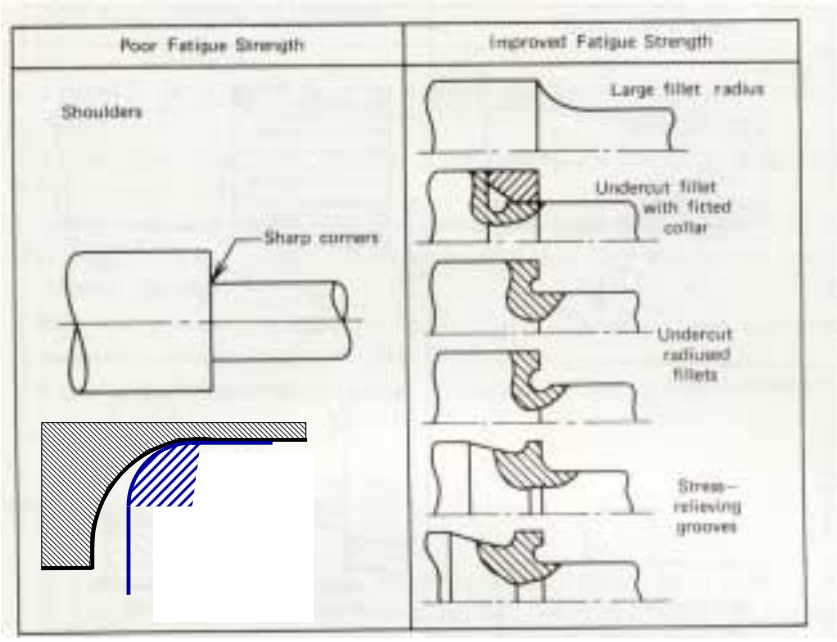
Fattore di intaglio



CDMI - Fatica

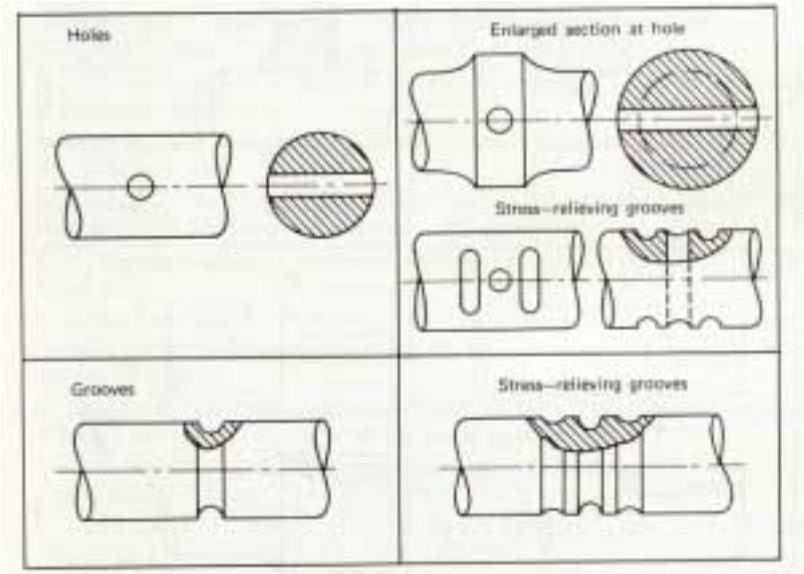
Effetto delle concentrazioni di tensione sulla vita a fatica

Fattore di intaglio



Effetto delle concentrazioni di tensione sulla vita a fatica

Fattore di intaglio

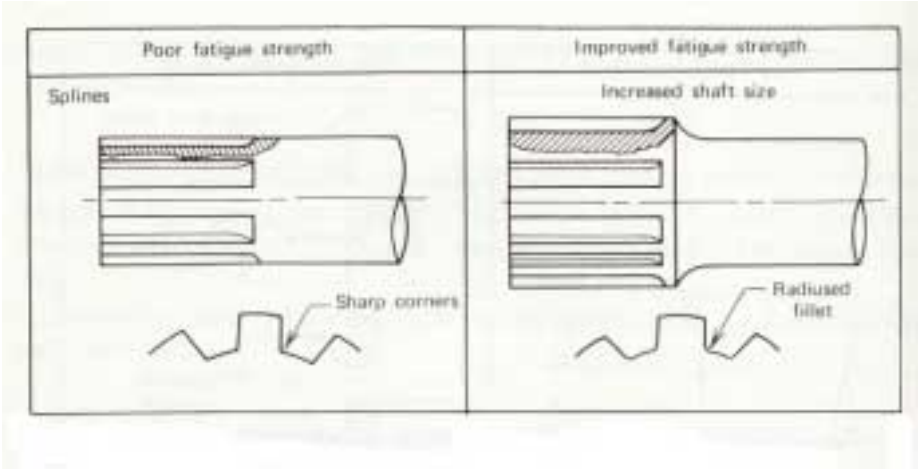


Curare il disegno per rendere minimo il fattore di intaglio.

Effetto delle concentrazioni di tensione sulla vita a fatica

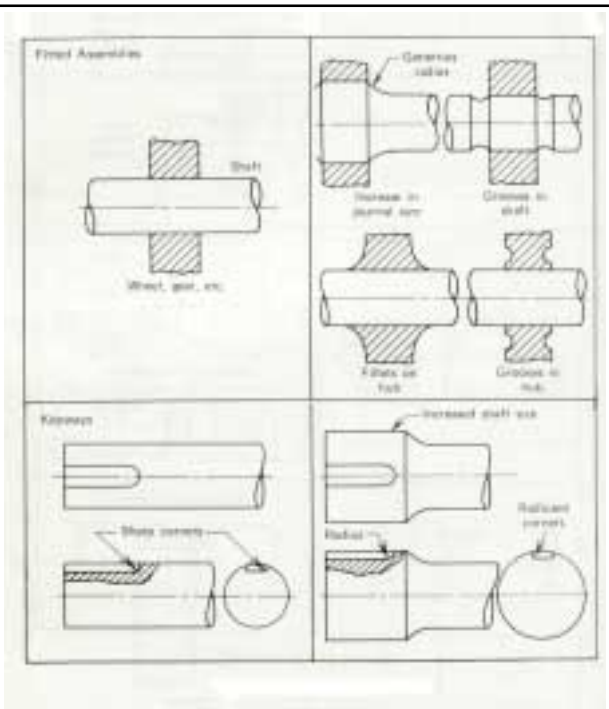
Fattore di intaglio

Curare il disegno per rendere minimo il fattore di intaglio.



Effetto delle concentrazioni di tensione sulla vita a fatica

Curare il disegno per rendere minimo il fattore di intaglio.



Effetto delle concentrazioni di tensione sulla vita a fatica

La sensibilità all'intaglio.

I materiali metallici sono più o meno sensibili alla presenza di un intaglio.

Può essere definito un fattore di sensibilità all'intaglio, definito come segue:

$$q = \frac{K_e - 1}{K_t - 1}$$

dove K_e rappresenta il fattore effettivo di intaglio,
mentre K_t indica, come sempre, il fattore teorico di intaglio.

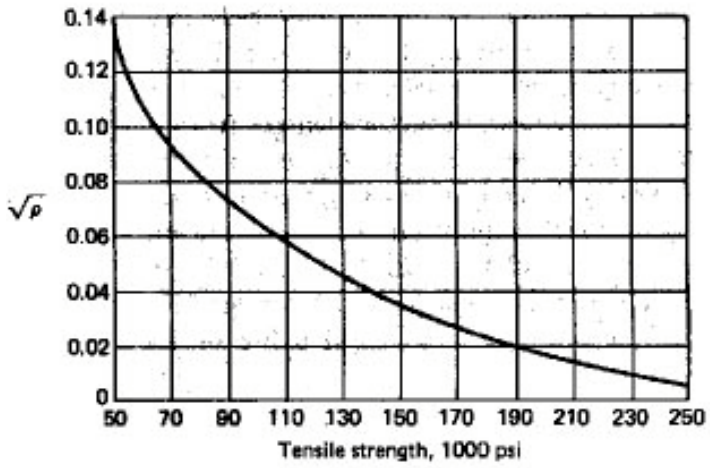
Il fattore q può essere calcolato come segue: $q = \dfrac{1}{1 + \sqrt{\dfrac{\rho}{r}}}$ (Neuber)

Dove $\sqrt{\rho}$ è una caratteristica del materiale ed r è il raggio di raccordo

Effetto delle concentrazioni di tensione sulla vita a fatica

La sensibilità all'intaglio.

Andamento del parametro $\sqrt{\rho}$ in funzione della tensione di rottura del materiale



Effetto delle concentrazioni di tensione sulla vita a fatica

La sensibilità all'intaglio.

Per elementi cilindrici a sezione circolare

ρ può essere dato dalla relazione: $\rho = 5.08\left(1-\frac{\sigma_S}{\sigma_R}\right)^3\left(1-\frac{1.27}{d}\right)$ valida in mm

dove d è il diametro del componente.

Il fattore q si trova in letteratura espresso anche da una relazione leggermente differente:

$$q = \frac{1}{1+\frac{\rho}{r}}$$

Effetto delle concentrazioni di tensione sulla vita a fatica

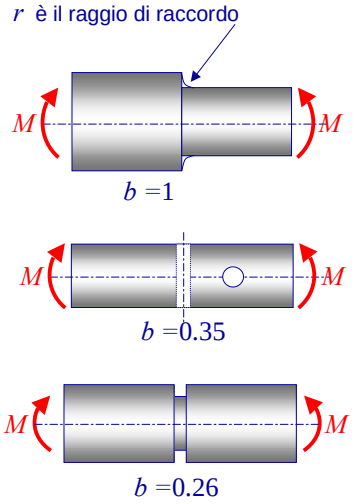
La sensibilità all'intaglio.

Un'altra espressione di q è quella di Haywood:

$$q = \frac{1}{1 + \frac{a}{\sqrt{br}}}$$

dove: a è una costante funzione del materiale
b dipende dal tipo di intaglio
r è il raggio di raccordo

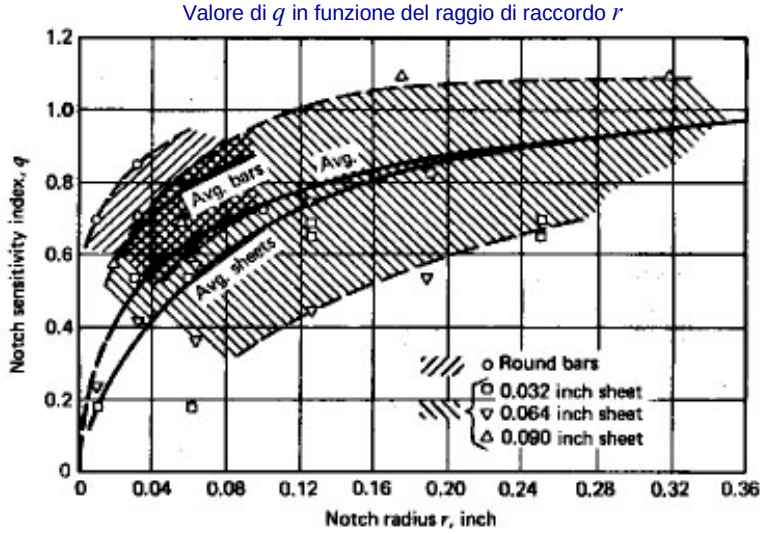
Tipo di materiale	a (mm)^0.5
Acciai al C	0,328
Acciai legati	0,151
Leghe di Rame	0,353
Leghe di Alluminio	0,453
Leghe di Magnesio	0,222



Effetto delle concentrazioni di tensione sulla vita a fatica

La sensibilità all'intaglio.

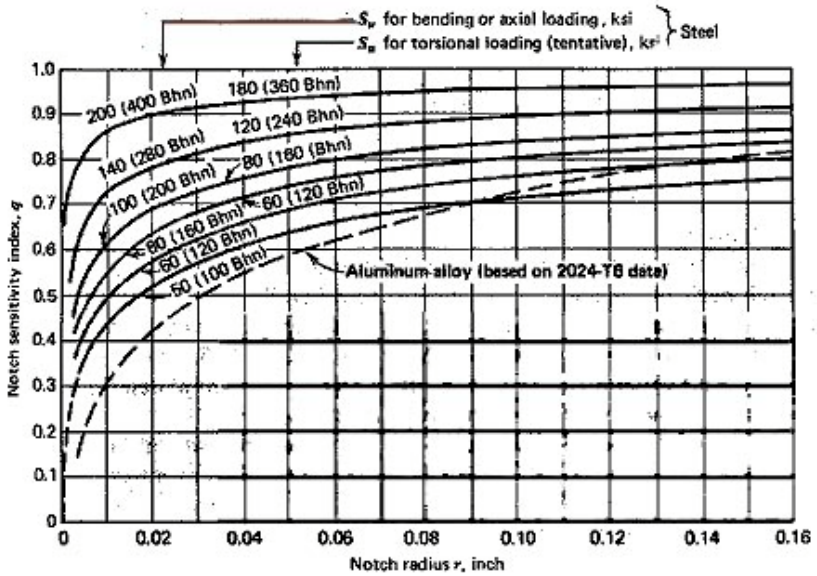
Valore di q in funzione del raggio di raccordo r



Effetto delle concentrazioni di tensione sulla vita a fatica

La sensibilità all'intaglio.

Valore di q in funzione del raggio di raccordo r



Effetto delle concentrazioni di tensione sulla vita a fatica

La sensibilità all'intaglio.

Il fattore effettivo di intaglio può dunque essere espresso dalla relazione:

$$K_e = 1 + q \cdot (K_t - 1)$$

Il fattore effettivo di intaglio è applicabile ai materiali duttili nel caso di sollecitazione ciclica

Per i materiali fragili si applicherà sempre il valore teorico del fattore di intaglio: K_t

Ciò equivale a considerare, per tali materiali la massima sensibilità all'intaglio: $q = 1$

Effetto delle concentrazioni di tensione sulla vita a fatica

Fattore di intaglio

Valore del fattore di intaglio applicabile

	Sollecitazione statica	Sollecitazione ciclica
Materiali duttili	1	K_e
Materiali fragili	K_t	K_t

Effetto delle concentrazioni di tensione sulla vita a fatica

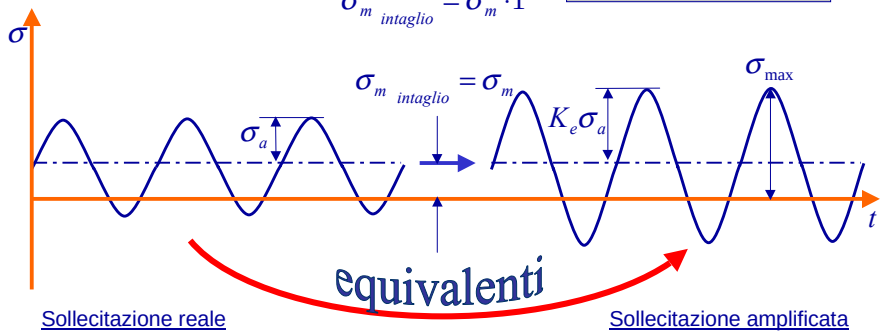
Fattore di intaglio

Nel caso di materiali duttili, il fattore di intaglio effettivo andrà applicato solo alla parte alterna della sollecitazione.

$$\sigma_{a\ intaglio} = \sigma_a \cdot K_e$$

$$\sigma_{m\ intaglio} = \sigma_m \cdot 1$$

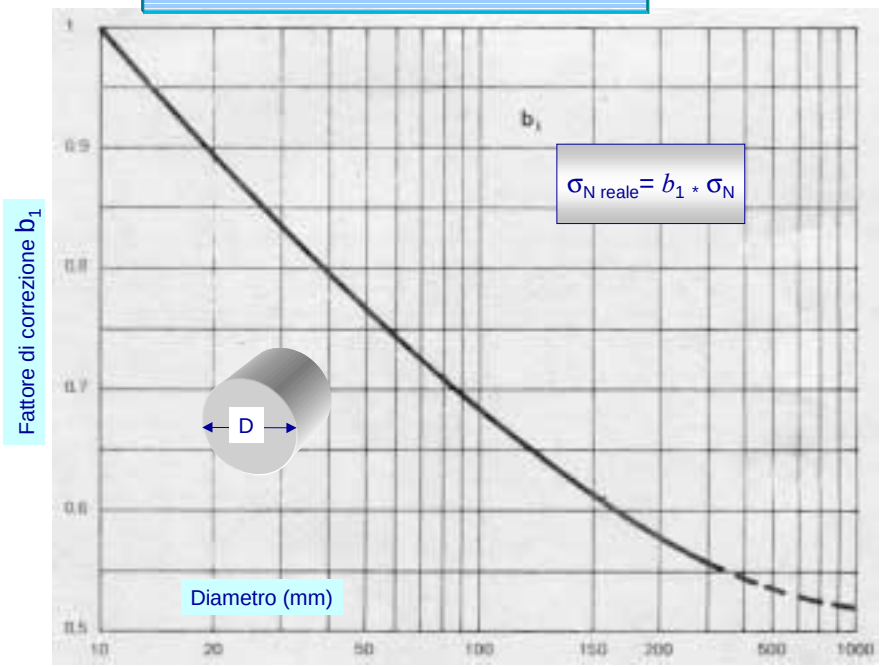
$$\boxed{\sigma_{\max} = \sigma_m + K_e \cdot \sigma_a}$$



Sollecitazione reale applicata al componente con intaglio.

Sollecitazione amplificata applicata ad un componente privo di intaglio.

Effetto delle dimensioni sulla vita a fatica



Effetto della finitura superficiale sulla vita a fatica

a = lucidatura fine $R_a \leq 1\ \mu m$
b = lucidatura media $R_a \leq 1.5 \div 2\ \mu m$
c = rettifica fine $R_a \leq 2.5 \div 6\ \mu m$
d = rettifica media $R_a \leq 6 \div 16\ \mu m$
e = sgrossatura buona $R_a \leq 100 \div 160\ \mu m$
f = sgrossatura normale
g = grezzo di laminazione
h = con corrosione in acqua dolce
i =con corrosione in acqua di mare

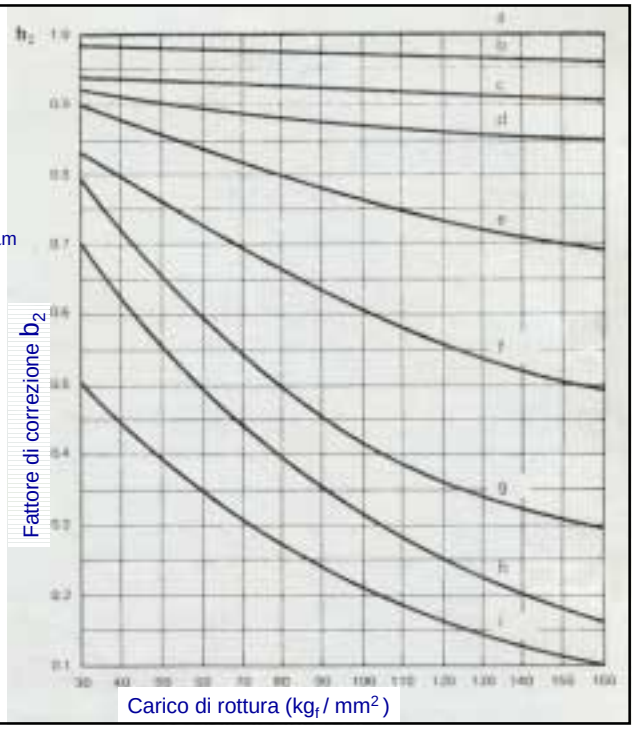
$$\sigma_{N\ reale} = b_2 * \sigma_N$$

Considerando anche il coefficiente relativo alle dimensioni si ha:

$$\sigma_{N\ reale} = b_1 * b_2 * \sigma_N$$

In generale si può scrivere:

$$\sigma_{N\,reale} = \prod_i b_i \cdot \sigma_N$$

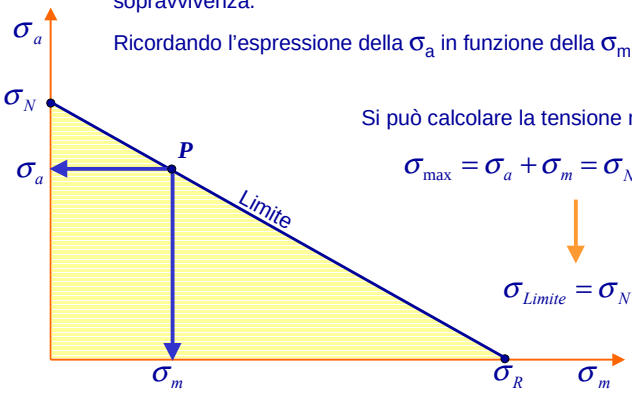


Il coefficiente di sicurezza

N cicli

Si consideri il comportamento a fatica rappresentato sul piano di Soderberg: è possibile definire il limite di danneggiamento e la relativa area di sopravvivenza.

Ricordando l'espressione della σ_a in funzione della σ_m : $\sigma_a = \sigma_N - \frac{\sigma_N}{\sigma_R}\sigma_m$



Si può calcolare la tensione massima di cilclo σ_{max} :

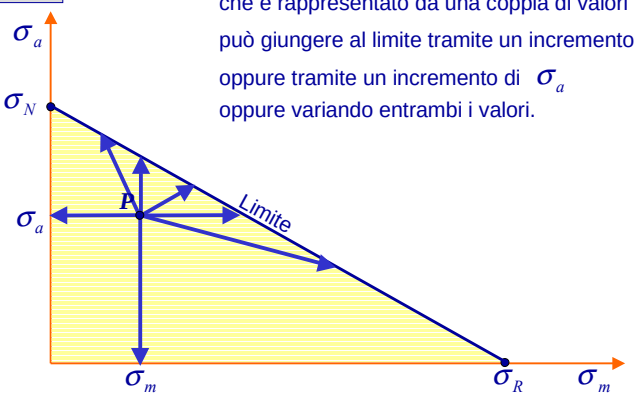
$$\sigma_{\max} = \sigma_a + \sigma_m = \sigma_N - \frac{\sigma_N}{\sigma_R}\sigma_m + \sigma_m$$

$$\sigma_{Limite} = \sigma_N + \left(1 - \frac{\sigma_N}{\sigma_R}\right)\sigma_m$$

Il coefficiente di sicurezza

N cicli

Un qualsiasi punto P all'interno dell'area sottesa dal segmento σ_N σ_R che è rappresentato da una coppia di valori σ_a σ_m può giungere al limite tramite un incremento di σ_m oppure tramite un incremento di σ_a oppure variando entrambi i valori.



Il coefficiente di sicurezza

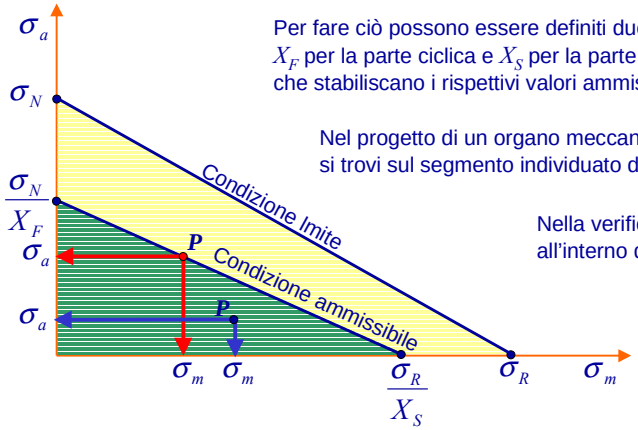
N cicli

Stabilire un coefficiente di sicurezza, in questo caso, equivale a tracciare un secondo segmento, interno all'area di sopravvivenza, che stabilisca il confine "ammissibile" della sollecitazione a fatica con media non nulla.

Per fare ciò possono essere definiti due coefficienti di sicurezza, X_F per la parte ciclica e X_S per la parte statica della sollecitazione che stabiliscano i rispettivi valori ammissibili per le sollecitazioni.

Nel progetto di un organo meccanico si impone che il punto ***P*** si trovi sul segmento individuato dalle tensioni ammissibili.

Nella verifica il punto ***P*** dovrà trovarsi all'interno dell'area in verde.



$$\sigma_{0_F} = \frac{\sigma_N}{X_F} \qquad \sigma_{0_S} = \frac{\sigma_R}{X_S}$$

Il coefficiente di sicurezza

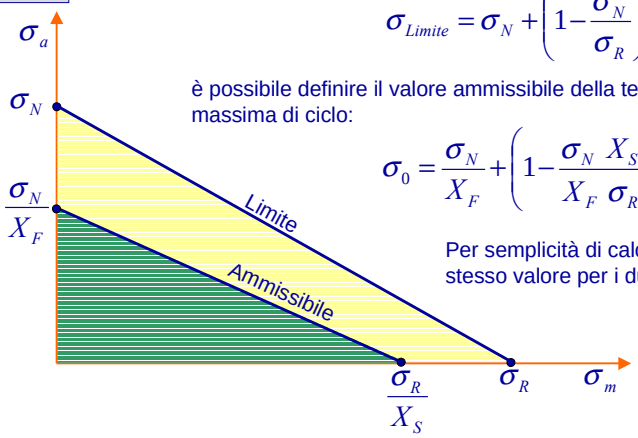
N cicli

In base al valore limite della tensione massima di ciclo, calcolato prima:

$$\sigma_{Limite} = \sigma_N + \left(1 - \frac{\sigma_N}{\sigma_R}\right)\sigma_m$$

è possibile definire il valore ammissibile della tensione massima di ciclo:

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_N}{X_F} + \left(1 - \frac{\sigma_N}{X_F}\frac{X_S}{\sigma_R}\right)\sigma_m$$

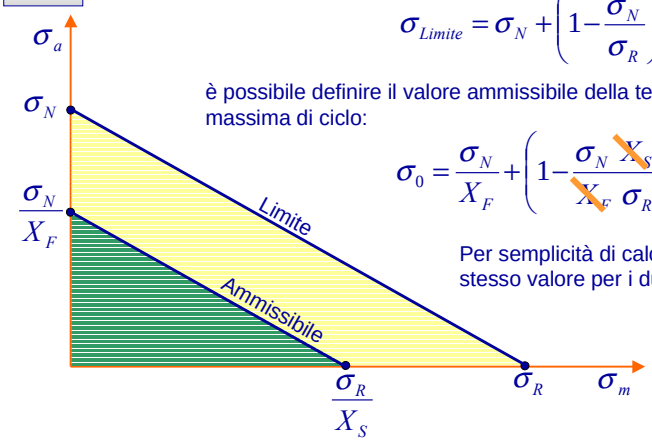


Per semplicità di calcolo, si assume in genere lo stesso valore per i due coefficienti di sicurezza:

$$X_S = X_F = X$$

Il coefficiente di sicurezza

N cicli



In base al valore limite della tensione massima di ciclo, calcolato prima:

$$\sigma_{Limite} = \sigma_N + \left(1 - \frac{\sigma_N}{\sigma_R}\right)\sigma_m$$

è possibile definire il valore ammissibile della tensione massima di ciclo:

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_N}{X_F} + \left(1 - \frac{\sigma_N}{\cancel{X_F}}\frac{\cancel{X_S}}{\sigma_R}\right)\sigma_m$$

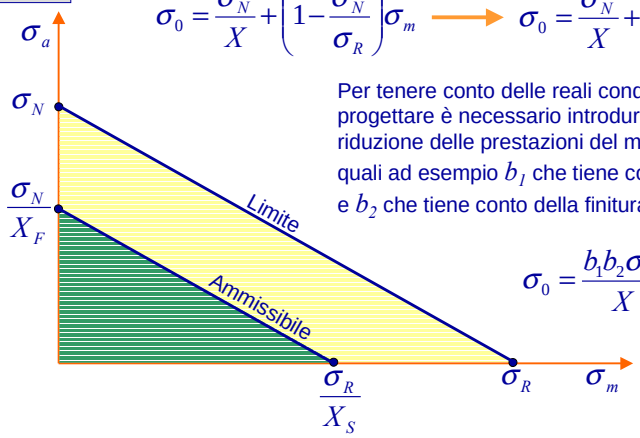
Per semplicità di calcolo, si assume in genere lo stesso valore per i due coefficienti di sicurezza:

$$X_S = X_F = X$$

La tensione ammissibile può dunque essere riscritta: $\sigma_0 = \frac{\sigma_N}{X} + \left(1 - \frac{\sigma_N}{\sigma_R}\right)\sigma_m$

La relazione di progetto

N cicli



Ricordando la definizione di r: $r = \frac{\sigma_N}{\sigma_R}$

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_N}{X} + \left(1 - \frac{\sigma_N}{\sigma_R}\right)\sigma_m \longrightarrow \sigma_0 = \frac{\sigma_N}{X} + (1 - r)\,\sigma_m$$

Per tenere conto delle reali condizioni del componente da progettare è necessario introdurre i vari coefficienti di riduzione delle prestazioni del materiale, quali ad esempio b_1 che tiene conto delle dimensioni e b_2 che tiene conto della finitura superficiale:

$$\sigma_0 = \frac{b_1 b_2 \sigma_N}{X} + \left(1 - \frac{b_1 b_2 \sigma_N}{\sigma_R}\right)\sigma_m$$

Nel caso di progetto a vita infinita la relazione può essere riscritta come segue:

$$\sigma_0 = \frac{b_1 b_2 \sigma_{LF}}{X} + (1 - b_1 b_2 r)\,\sigma_m$$

La relazione di progetto

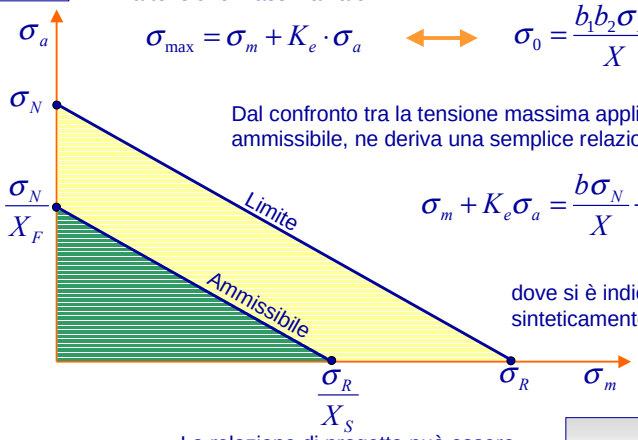
N cicli

Nel caso in cui sia concentrazione di tensione, dovuta ad un intaglio, la tensione massima vale:

$$\sigma_{\max} = \sigma_m + K_e \cdot \sigma_a$$

La tensione ammissibile vale:

$$\sigma_0 = \frac{b_1 b_2 \sigma_N}{X} + \left(1 - b_1 b_2 \frac{\sigma_N}{\sigma_R}\right) \sigma_m$$



Dal confronto tra la tensione massima applicata e la tensione ammissibile, ne deriva una semplice relazione di progetto:

$$\sigma_m + K_e \sigma_a = \frac{b \sigma_N}{X} + \left(1 - b \frac{\sigma_N}{\sigma_R}\right) \sigma_m$$

dove si è indicato sinteticamente: $b = \prod_i b_i$

La relazione di progetto può essere ulteriormente semplificata nel caso di vita infinita ($r = \sigma_{LF} / \sigma_R$) :

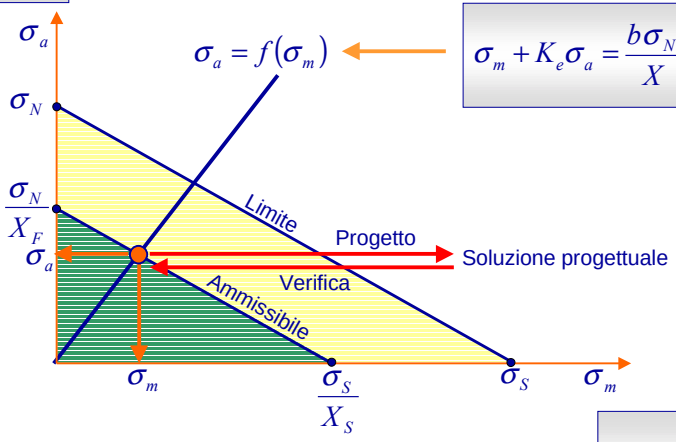
$$K_e \sigma_a + b r \sigma_m = \frac{b \sigma_{LF}}{X}$$

La relazione di progetto

N cicli

Rappresentazione grafica della relazione di progetto (Soderberg)

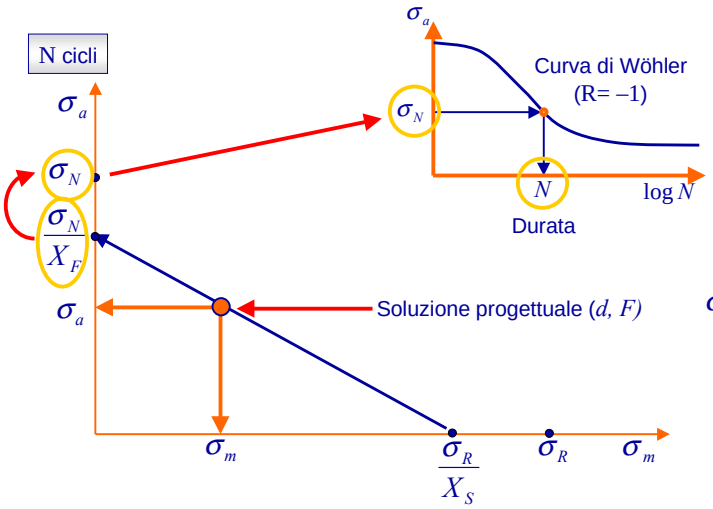
$$\sigma_m + K_e \sigma_a = \frac{b \sigma_N}{X} + \left(1 - b \frac{\sigma_N}{\sigma_S}\right) \sigma_m$$



$$X = \frac{b \sigma_N}{K_e \sigma_a + b \frac{\sigma_N}{\sigma_R} \sigma_m}$$

La relazione di progetto

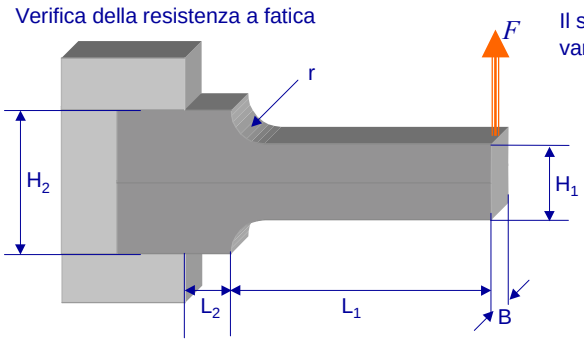
Rappresentazione grafica di una procedura di calcolo della durata



$$\sigma_N = \frac{K_e \sigma_a}{\frac{b}{X} - b\frac{\sigma_m}{\sigma_R}}$$

Esempio di calcolo

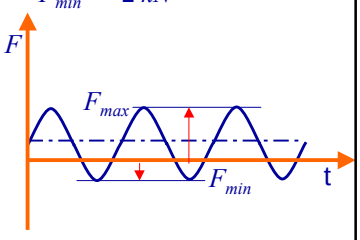
Verifica della resistenza a fatica



Il supporto è soggetto ad un carico F variabile nel tempo ciclicamente.

$F_{max} = 6\ kN$

$F_{min} = -2\ kN$



Specifica:

Coefficiente di sicurezza minimo: $X_S = 1.4$ Durata: illimitata

Dimensioni:

$B = 20\ mm$
$H_1 = 60\ mm$
$H_2 = 72\ mm$
$L_1 = 200\ mm$
$L_2 = 50\ mm$
$r = 4.8\ mm$

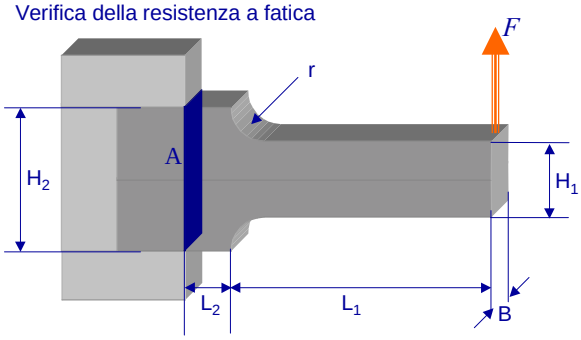
Materiale: Acciaio C40

$\sigma_R = 710$ MPa
$\sigma_S = 500$ MPa
$\sigma_{LF} = 280$ MPa

Condizione di finitura della superficie del supporto: rettifica media

Esempio di calcolo

Verifica della resistenza a fatica



Calcolo delle tensioni

Sezione di incastro A

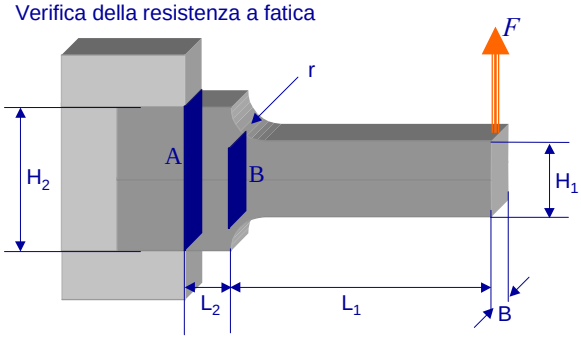
$$\sigma_f = \frac{M_f}{W_f} = \frac{6F \cdot (L_1 + L_2)}{B \cdot H_2^{\,2}}$$

$$\sigma_{f\,\max} = \frac{6F_{\max} \cdot (L_1 + L_2)}{B \cdot H_2^{\,2}} = \frac{6 \cdot 6000 \cdot (0.2 + 0.05)}{0.02 \cdot 0.072^2} = 86.8MPa$$

$$\sigma_{f\,\min} = \frac{6F_{\min} \cdot (L_1 + L_2)}{B \cdot H_2^{\,2}} = -\frac{6 \cdot 2000 \cdot (0.2 + 0.05)}{0.02 \cdot 0.072^2} = -28.9MPa$$

Esempio di calcolo

Verifica della resistenza a fatica



Calcolo delle tensioni

Sezione B

$$\sigma_f = \frac{M_f}{W_f} = \frac{6F \cdot L_1}{B \cdot H_1^{\,2}}$$

$$\sigma_{f\,\max} = \frac{6F_{\max} \cdot L_1}{B \cdot H_1^{\,2}} = \frac{6 \cdot 6000 \cdot 0.2}{0.02 \cdot 0.06^2} = 100MPa$$

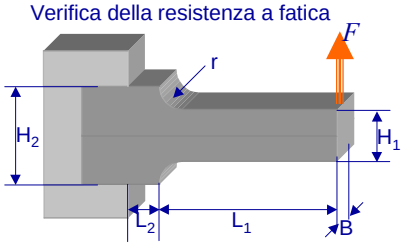
$$\sigma_{f\,\min} = \frac{6F_{\min} \cdot L_1}{B \cdot H_1^{\,2}} = -\frac{6 \cdot 2000 \cdot 0.2}{0.02 \cdot 0.06^2} = -33.3MPa$$

La sezione B è la più sollecitata, anche senza tenere conto del fattore di intaglio.

Quindi per la verifica sarà considerata solo la sezione B.

Esempio di calcolo

Verifica della resistenza a fatica

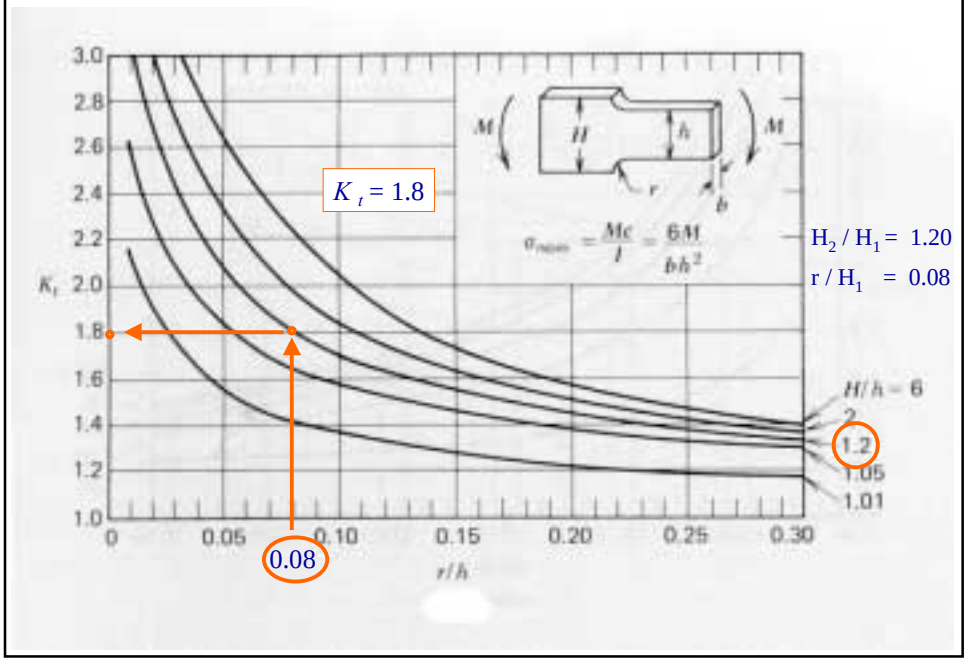


Determinazione del fattore di intaglio teorico:

$H_1 = 60\ mm$
$H_2 = 72\ mm$
$r = 4.8\ mm$

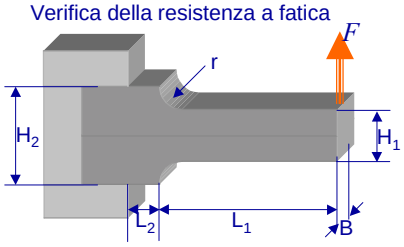
$r / H_1 = 0.08$
$H_2 / H_1 = 1.20$

Esempio di calcolo



Esempio di calcolo

Verifica della resistenza a fatica



Determinazione del fattore di intaglio teorico:

$$\left.\begin{array}{l} H_1 = 60\ mm \\ H_2 = 72\ mm \\ r = 4.8\ mm \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} r / H_1 = 0.08 \\ H_2 / H_1 = 1.20 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{K_t = 1.8}$$

Fattore di sensibilità all'intaglio:

$$q = \frac{1}{1+\sqrt{\frac{\rho}{r}}} = \frac{1}{1+\sqrt{\frac{0.1287}{4.8}}} = \boxed{0.86}$$

$$\rho = 5.08 \cdot \left(1-\frac{\sigma_S}{\sigma_R}\right)^3 \cdot \left(1-\frac{1.27}{H_1}\right)$$

$$\rho = 5.08 \cdot \left(1-\frac{500}{710}\right)^3 \cdot \left(1-\frac{1.27}{60}\right) = 0.1287$$

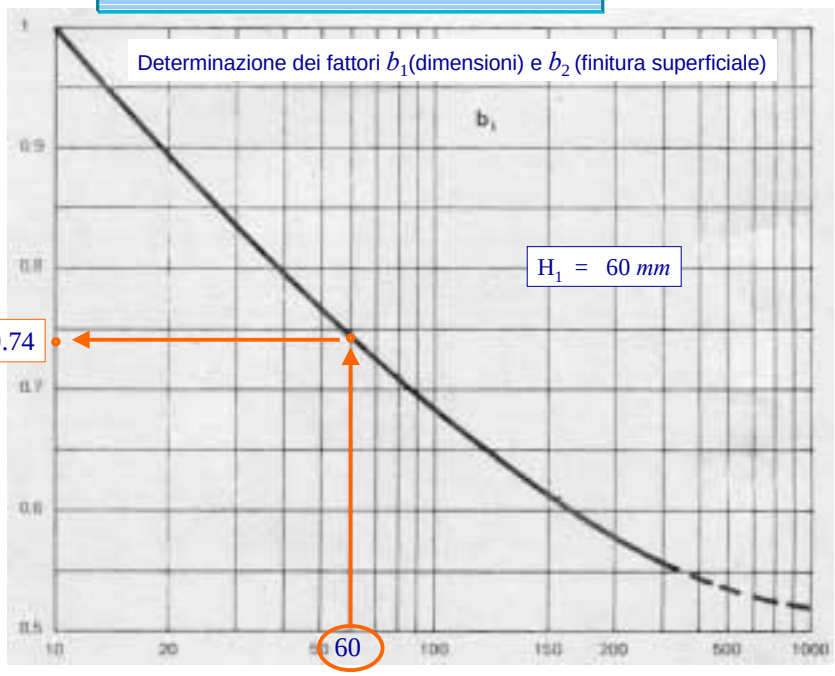
Calcolo del fattore di intaglio effettivo:

$$K_e = 1 + q \cdot (K_t - 1)$$

$$K_e = 1 + 0.86 \cdot (1.8 - 1) = 1.688 \cong \boxed{1.7}$$

Esempio di calcolo

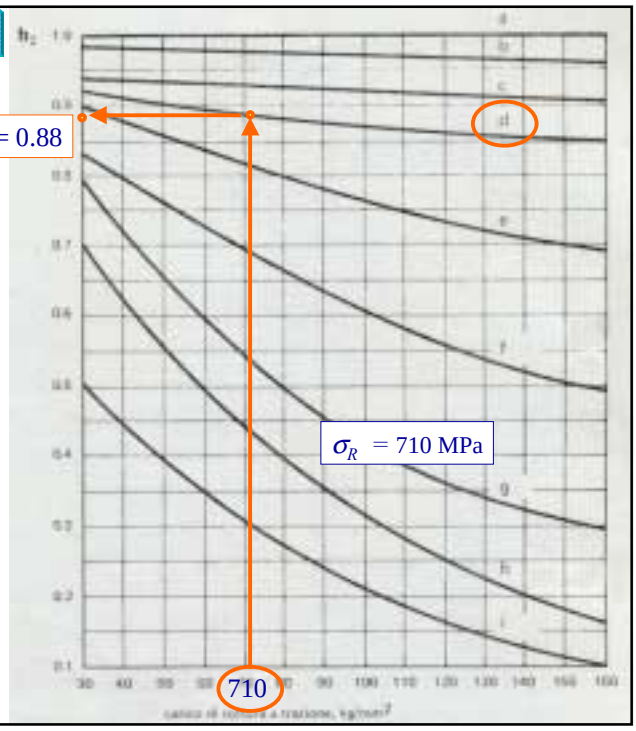
Determinazione dei fattori b_1 (dimensioni) e b_2 (finitura superficiale)



Esempio di calcolo

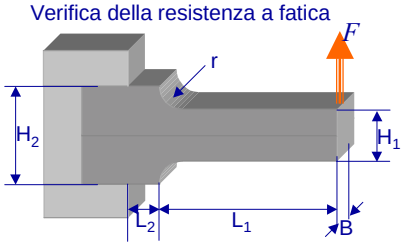
finitura della superficie:
rettifica media

curva d



Esempio di calcolo

Verifica della resistenza a fatica



I dati necessari al calcolo, ottenuti finora, sono:

$K_e = 1.7$

$b_1 = 0.74$

$b_2 = 0.88$

$\sigma_{max} = 100$ MPa

$\sigma_{min} = -33.3$ MPa

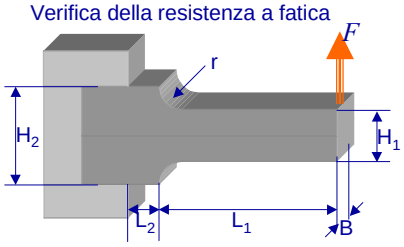
È necessario ancora calcolare σ_a e σ_m :

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = \frac{100 - (-33.3)}{2} = 66.7 MPa$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} = \frac{100 + (-33.3)}{2} = 33.3 MPa$$

Esempio di calcolo

Verifica della resistenza a fatica



I dati necessari al calcolo, ottenuti finora, sono:

$K_e = 1.7$ $\quad \sigma_{max} = 100$ MPa

$b_1 = 0.74$ $\quad \sigma_{min} = -33.3$ MPa

$b_2 = 0.88$ $\quad \sigma_m = 33.3$ MPa

$\sigma_{LF} = 280$ MPa $\quad \sigma_a = 66.7$ MPa

A questo punto è possibile utilizzare la relazione

$$K_e\sigma_a + br\sigma_m = \frac{b\sigma_{LF}}{X}$$

$$X = \frac{b\sigma_N}{K_e\sigma_a + br\sigma_m}$$

$$X = \frac{0.6512 \cdot 280}{1.7 \cdot 66.7 + 0.6512 \cdot 0.3944 \cdot 33.3} = \frac{182.3}{121.9} = 1.49$$

dove:

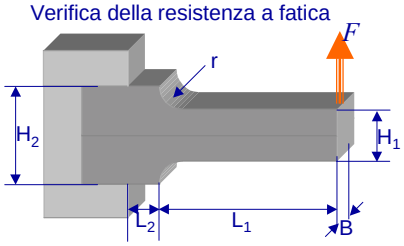
$b = b_1 \cdot b_2 = 0.74 \cdot 0.88 = 0.6512$

$r = \sigma_{LF} / \sigma_R = 280 / 710 = 0.3944$

Essendo richiesto dalla specifica $X_S \geq 1.4$ il componente rispetta la specifica

Esempio di calcolo

Verifica della resistenza a fatica



I dati necessari al calcolo, ottenuti finora, sono:

$K_e = 1.7$ $\quad \sigma_{max} = 100$ MPa

$b_1 = 0.74$ $\quad \sigma_{min} = -33.3$ MPa

$b_2 = 0.88$ $\quad \sigma_m = 33.3$ MPa

$\sigma_{LF} = 280$ MPa $\quad \sigma_a = 100.0$ MPa

A questo punto è possibile utilizzare la relazione

$$K_e\sigma_a + br\sigma_m = \frac{b\sigma_{LF}}{X}$$

$$X = \frac{b\sigma_N}{K_e\sigma_a + br\sigma_m}$$

$$X = \frac{0.6512 \cdot 280}{1.7 \cdot 66.7 + 0.6512 \cdot 0.56 \cdot 33.3} = \frac{182.3}{125.5} = 1.45$$

Se si utilizza la retta di Soderberg il rapporto r sarà calcolato diversamente:

$r = \sigma_{LF} / \sigma_S = 280 / 500 = 0.56$

di conseguenza il coefficiente di sicurezza risulterà modificato.

Il componente è ancora in specifica

Calcolo a fatica nel caso di stato piano di tensione

È molto frequente nelle costruzioni meccaniche che la sollecitazione di fatica si sviluppi in uno stato piano di tensione.

Ipotesi.
Componenti di tensione non nulle: σ e τ

Nel caso monoassiale la verifica di resistenza è data dal confronto tra le quantità:

$$\sigma_{\max} = \sigma_m + K_e \cdot \sigma_a \quad \longleftrightarrow \quad \sigma_0 = \frac{b\sigma_N}{X} + \left(1 - b\frac{\sigma_N}{\sigma_S}\right)\sigma_m$$

Tensione massima di lavoro — Tensione ammissibile

Nel caso di tensione piana la tensione di lavoro deve essere espressa da una quantità scalare equivalente, la quale possa essere confrontata con la tensione ammissibile monoassiale.

Ammettendo valido il criterio di Tresca, la tensione equivalente, nel caso siano presenti solo le componenti σ e τ del tensore tensione, assume la forma:

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$(\sigma_m + K_e \cdot \sigma_a)^2 \qquad (\tau_m + K'_e \cdot \tau_a)^2$$

Le componenti di tensione, essendo la sollecitazione di fatica, possono essere espresse in termini di valore medio ed alterno.

Inoltre deve essere considerato l'effetto del fattore di intaglio.

Calcolo a fatica nel caso di stato piano di tensione

L'esperienza ha dimostrato che nel caso di sollecitazione di fatica il rapporto tra le tensioni limite σ_L e τ_L è diverso da quello osservato nel caso statico.

Il valore teorico di tale rapporto previsto dalla teoria di Tresca vale: $\left(\frac{\sigma_L}{\tau_L}\right)_T = 2$

Nel caso della fatica il rapporto tra le tensioni limite può essere determinato sperimentalmente e risulta: $\left(\frac{\sigma_L}{\tau_L}\right)_S \neq 2$

Può essere introdotto un coefficiente in modo tale da porre l'eguaglianza: $\left(\frac{\sigma_L}{\tau_L}\right)_S = \alpha_0 \left(\frac{\sigma_L}{\tau_L}\right)_T$

α_0 che è noto come "coefficiente di Bach" può quindi essere definito come:

E se si considera applicabile il criterio di Tresca si ha:

$$\alpha_0 = \frac{\left(\frac{\sigma_L}{\tau_L}\right)_S}{\left(\frac{\sigma_L}{\tau_L}\right)_T} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_L}{\tau_L}\right)_S$$

Calcolo a fatica nel caso di stato piano di tensione

I valori sperimentali delle tensioni limite, ottenuti per un numero di cicli N oppure a vita infinita, se il materiale presenta limite di fatica, sono dati dalle seguenti espressioni:

$$\sigma_L = \frac{b\sigma_N}{K_e} + \left(1 - b\frac{\sigma_N}{K_e\sigma_S}\right)\sigma_m$$

$$\tau_L = \frac{b'\tau_N}{K'_e} + \left(1 - b'\frac{\tau_N}{K'_e\tau_S}\right)\tau_m$$

quindi α_0 è calcolato dal rapporto

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}\frac{\frac{b\sigma_N}{K_e} + \left(1 - b\frac{\sigma_N}{K_e\sigma_S}\right)\sigma_m}{\frac{b'\tau_N}{K'_e} + \left(1 - b'\frac{\tau_N}{K'_e\tau_S}\right)\tau_m}$$

Può dunque essere calcolata la tensione equivalente, intesa come valore massimo di una tensione ciclica monoassiale la quale crea nel componente in esame lo stesso danno della sollecitazione reale, in un numero stabilito di cicli N.

$$\sigma_{\max} = \sqrt{(\sigma_m + K_e \cdot \sigma_a)^2 + 4[\alpha_0 \cdot (\tau_m + K'_e \cdot \tau_a)]^2}$$

Calcolo a fatica nel caso di stato piano di tensione

La relazione di progetto o di verifica a fatica nel caso di stato di tensione piano è la seguente

$$\sigma_{\max} = \sqrt{(\sigma_m + K_e \cdot \sigma_a)^2 + 4[\alpha_0 \cdot (\tau_m + K'_e \cdot \tau_a)]^2} \Longleftrightarrow \sigma_0 = \frac{b\sigma_N}{X} + \left(1 - b\frac{\sigma_N}{\sigma_S}\right)\sigma_m$$

Tensione equivalente massima di lavoro

Tensione ammissibile

$$\sigma_N = \frac{\sigma_0 - \sigma_m}{\frac{b}{X} - \frac{b\sigma_m}{\sigma_S}}$$

Calcolo a fatica nel caso generale di stato triassiale di tensione

Caso in cui le tensioni principali abbiano media nulla:

$$\sigma_{a_{eqv}} = \sqrt{\sigma_{1a}^2 + \sigma_{2a}^2 + \sigma_{3a}^2 - \sigma_{1a}^2\sigma_{2a}^2 - \sigma_{2a}^2\sigma_{3a}^2 - \sigma_{1a}^2\sigma_{3a}^2} \quad \Longleftrightarrow \quad \sigma_0 = \frac{b\sigma_N}{X}$$

Tensione equivalente alterna di lavoro — Tensione alterna ammissibile

Metodo di Sines:

$$\sigma_{a_{eqv}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_{x_a} - \sigma_{y_a})^2 + (\sigma_{y_a} - \sigma_{z_a})^2 + (\sigma_{z_a} - \sigma_{x_a})^2 + 6(\tau_{xy_a}^2 + \tau_{yz_a}^2 + \tau_{xz_a}^2)}$$

Tensione equivalente alterna di lavoro

$$\sigma_{m_{eqv}} = \sigma_{x_m} + \sigma_{y_m} + \sigma_{z_m}$$

Tensione equivalente media di lavoro

Le tensioni medie di taglio non influenzano la resistenza a fatica

Calcolo a fatica nel caso generale di stato triassiale di tensione

Metodo di von Mises:

$$\sigma_{a_{eqv}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_{x_a} - \sigma_{y_a})^2 + (\sigma_{y_a} - \sigma_{z_a})^2 + (\sigma_{z_a} - \sigma_{x_a})^2 + 6(\tau_{xy_a}^2 + \tau_{yz_a}^2 + \tau_{xz_a}^2)}$$

Tensione equivalente alterna di lavoro

$$\sigma_{m_{eqv}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_{x_m} - \sigma_{y_m})^2 + (\sigma_{y_m} - \sigma_{z_m})^2 + (\sigma_{z_m} - \sigma_{x_m})^2 + 6(\tau_{xy_m}^2 + \tau_{yz_m}^2 + \tau_{xz_m}^2)}$$

Tensione equivalente media di lavoro

Metodo SEQA:

$$SEQA = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{3}{4}Q^2 + \sqrt{1 + \frac{3}{2}Q^2\cos 2\phi + \frac{9}{16}Q^4}}$$

$$Q = 2\frac{\tau}{\sigma}$$

σ =Tensione normale alterna dovuta alla flessione

τ =Tensione tangenziale alterna dovuta alla torsione

ϕ =angolo di fase tra i valori massimi di flessione e torsione