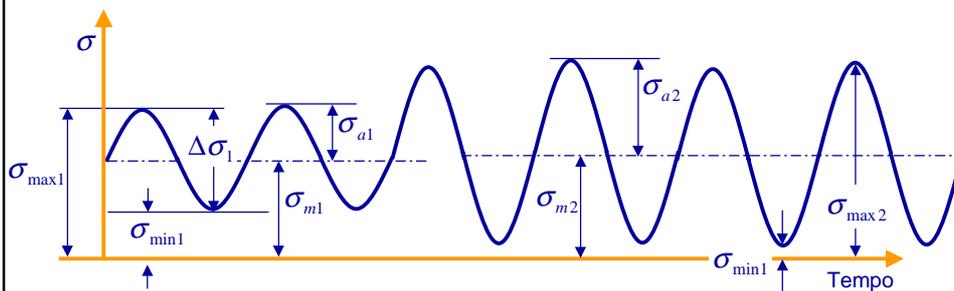


Modelli di accumulo del danno dovuto a carichi ciclici

Modelli di accumulo del danno dovuto a carichi ciclici

È molto raro che un componente meccanico sia sollecitato a fatica da un carico ciclico ad ampiezza costante.

Generalmente sia l'ampiezza che il valore medio della sollecitazione sono variabili nel tempo.



Modelli di accumulo del danno dovuto a carichi ciclici

Teoria lineare di Palmgren- Miner

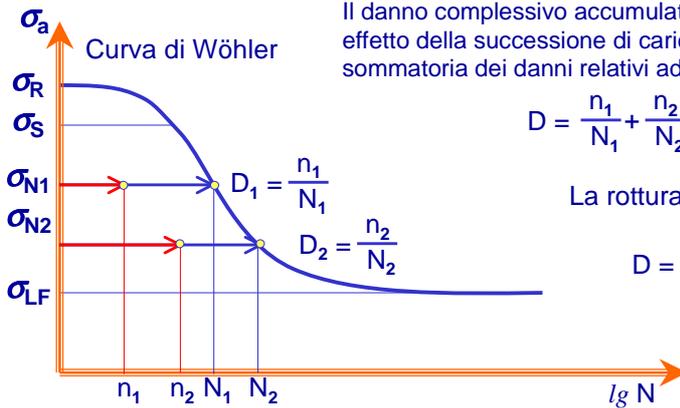
Il danno accumulato dal materiale per effetto del carico ciclico è proporzionale al rapporto tra il numero di cicli che il componente ha subito n_1 ed il numero di cicli N_1 che provoca rottura al livello di sollecitazione σ_{N1}

Il danno complessivo accumulato dal materiale per effetto della successione di carichi ciclici è dato dalla sommatoria dei danni relativi ad ogni livello di carico:

$$D = \frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2} + \dots$$

La rottura si verifica se:

$$D = \sum_i \frac{n_i}{N_i} \geq 1$$



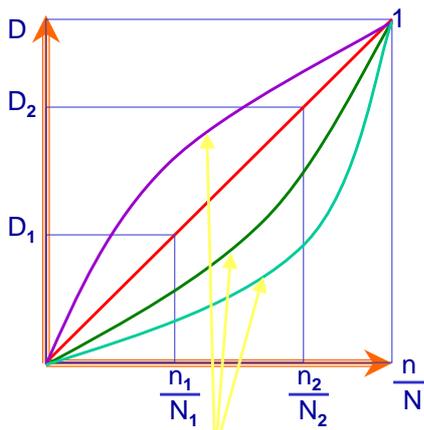
Modelli di accumulo del danno

Teoria lineare di Palmgren- Miner $D_i = \frac{n_i}{N_i}$

In realtà la rottura può verificarsi per valori di D compresi tra 0.6 e 1.6

$$D = \sum_i \frac{n_i}{N_i} \begin{matrix} < 1.6 \\ > 0.6 \end{matrix} \begin{matrix} < 4 \\ > 0.25 \end{matrix}$$

e nel caso di particolari successioni di cicli la variabilità del valore critico di D può essere ancora più ampia, con valori compresi tra 0.25 e 4

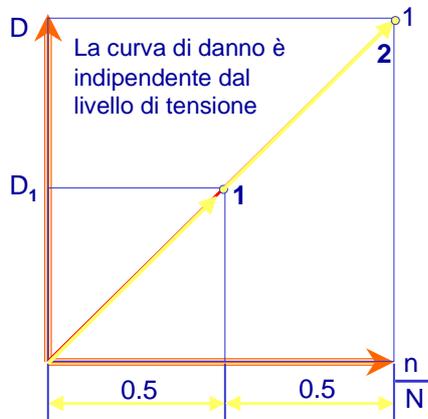


le diverse curve sono relative a diversi valori di m_i

Teoria non lineare di Marco-Starkey $D_i = \left(\frac{n_i}{N_i}\right)^{m_i}$

questo modello di accumulo di danno è sensibile all'ordine di successione della sequenza di carico.

Modelli di accumulo del danno



La curva di danno è indipendente dal livello di tensione

Applicando la teoria lineare nel caso di due livelli di sollecitazione σ_1 e σ_2 (con $\sigma_1 < \sigma_2$)

Il valore di $\sum_i \frac{n_i}{N_i}$ non dipende dalla sequenza di carico.

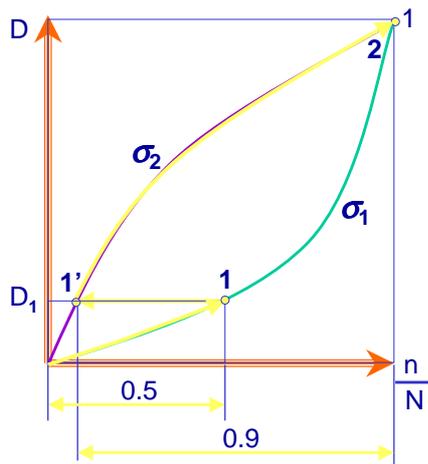
Sequenza \Rightarrow n_1 a livello σ_1
 n_2 a livello σ_2

$n_1 (\sigma_1)$ fino a $\frac{n_1}{N_1} = 0.5$

$n_2 (\sigma_2)$ fino a rottura $\Rightarrow D=1$

$$\frac{n_1}{N_1} = 0.5 \quad \frac{n_2}{N_2} = 0.5 \quad \longrightarrow \quad \sum_i \frac{n_i}{N_i} = 1$$

Modelli di accumulo del danno



Teoria non lineare di Marco-Starkey $D_i = \left(\frac{n_i}{N_i}\right)^{m_i}$
 m_i dipende dal livello di tensione

Applicando la teoria non lineare di Marco-Starkey nel caso di due livelli di sollecitazione σ_1 e σ_2 , (con $\sigma_1 < \sigma_2$)

Il valore di $\sum_i \frac{n_i}{N_i}$ dipende dalla sequenza di carico.

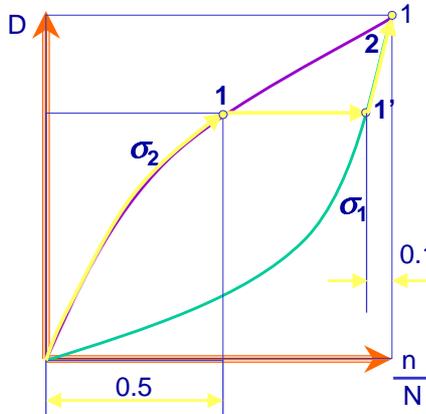
Sequenza n°1 \Rightarrow n_1 a livello σ_1
 n_2 a livello σ_2

Sequenza n°2 \Rightarrow n_2 a livello σ_2
 n_1 a livello σ_1

$$\frac{n_1}{N_1} = 0.5 \quad \frac{n_2}{N_2} = 0.9 \quad \longrightarrow \quad \sum_i \frac{n_i}{N_i} = 0.5 + 0.9 = 1.4$$

Modelli di accumulo del danno

Teoria non lineare di Marco-Starkey $D_i = \left(\frac{n_i}{N_i}\right)^{m_i}$
 m_i dipende dal livello di tensione



Applicando la teoria non lineare di Marco-Starkey nel caso di due livelli di sollecitazione σ_1 e σ_2 , (con $\sigma_1 < \sigma_2$)

Il valore di $\sum_i \frac{n_i}{N_i}$ dipende dalla sequenza di carico.

Sequenza n°1 \Rightarrow n_1 a livello σ_1
 n_2 a livello σ_2

Sequenza n°2 \Rightarrow n_2 a livello σ_2
 n_1 a livello σ_1

$$\frac{n_1}{N_1} = 0.5 \quad \frac{n_2}{N_2} = 0.15 \quad \longrightarrow \quad \sum_i \frac{n_i}{N_i} = 0.5 + 0.15 = 0.65$$

Modelli di accumulo del danno

Teoria non lineare di Marco-Starkey $D_i = \left(\frac{n_i}{N_i}\right)^{m_i}$
 m_i dipende dal livello di tensione

In generale, la vita stima della vita $\sum_i \frac{n_i}{N_i}$ dovuta ad una successione di livelli di carico può essere fatta mediante la seguente espressione:

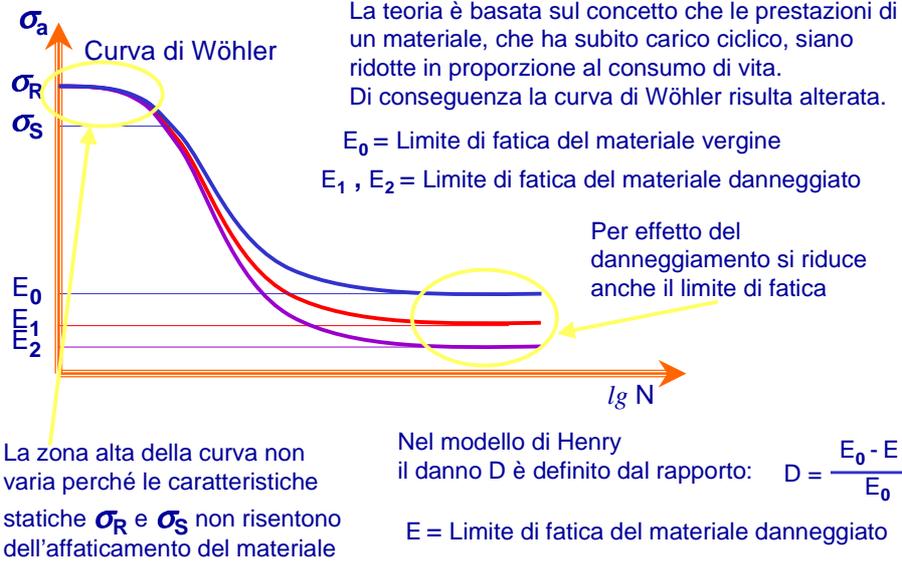
$$\sum \frac{n}{N} \cong \int_0^1 \frac{\left(1 + \frac{N_1}{N_2} + \frac{N_1}{N_3} + \frac{N_1}{N_4} + \dots + \frac{N_1}{N_i}\right) dD}{\left(1 + \frac{N_1}{N_2} r_2^D \frac{r_2-1}{r_2} + \frac{N_1}{N_3} r_3^D \frac{r_3-1}{r_3} + \dots + \frac{N_1}{N_i} r_i^D \frac{r_i-1}{r_i}\right)}$$

dove: D = livello di danno

$N_1, N_2, N_3, \dots, N_i = n^\circ$ di cicli a rottura relativi ad altrettanti livelli di tensione $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_i$

m_i = esponente dell'equazione del danno

r_i = rapporto m_i/m_1



IPOTESI: 1) la curva di Wöhler può essere descritta da una funzione del tipo:

$$N = \frac{k_0}{\sigma_a - E_0} \quad \text{dove} \quad k_0 \text{ è una costante del materiale}$$

$N = n^\circ$ cicli che causano rottura al livello di sollecitazione σ_a

2) non c'è danneggiamento se la σ_a è inferiore al limite di fatica E .

Il numero di cicli residuo al livello di sollecitazione σ_a vale: $N_r = \frac{k}{\sigma_a - E}$
 k ed E sono relativi al materiale danneggiato

Sulla base di numerose osservazioni sperimentali Henry afferma che il rapporto: $\frac{k_0}{E_0}$ rimane costante anche dopo danneggiamento per fatica.

Pertanto si può scrivere: $\frac{k}{k_0} = \frac{E}{E_0}$

In base a queste premesse il danno secondo il modello di Henry: $D = \frac{E_0 - E}{E_0}$ può essere calcolato come segue:

Modelli di accumulo del danno

Teoria di Henry

Il numero di cicli residuo N_r può essere scritto come: $N_r = N - n = \frac{k}{\sigma_a - E}$
 dove n è il n° cicli subiti dal materiale al livello di sollecitazione σ_a

Dividendo per N si ottiene: $1 - \frac{n}{N} = \frac{1}{N} \frac{k}{\sigma_a - E}$

Essendo: $N = \frac{k_0}{\sigma_a - E_0} \rightarrow 1 - \frac{n}{N} = \frac{\sigma_a - E_0}{k_0} \frac{k}{\sigma_a - E} = \frac{k}{k_0} \frac{\sigma_a - E_0}{\sigma_a - E}$

Essendo: $\frac{k}{k_0} = \frac{E}{E_0} \rightarrow 1 - \frac{n}{N} = \frac{E}{E_0} \frac{\sigma_a - E_0}{\sigma_a - E}$

Risolviendo rispetto ad E si ha: $E = \frac{\sigma_a \left(1 - \frac{n}{N}\right)}{\frac{\sigma_a - E_0}{E_0} + \left(1 - \frac{n}{N}\right)}$ E = Limite di fatica del materiale danneggiato

Modelli di accumulo del danno

Teoria di Henry

$$E = \frac{\sigma_a \left(1 - \frac{n}{N}\right)}{\frac{\sigma_a - E_0}{E_0} + \left(1 - \frac{n}{N}\right)}$$

$$D = \frac{E_0 - E}{E_0} = 1 - \frac{E}{E_0}$$

$$D = 1 - \frac{\sigma_a \left(1 - \frac{n}{N}\right)}{\sigma_a - E_0 + E_0 \left(1 - \frac{n}{N}\right)} \rightarrow D = \frac{\frac{n}{N}}{1 + \frac{E_0}{\sigma_a - E_0} \left(1 - \frac{n}{N}\right)}$$

Il livello di danno raggiunto D dipende quindi da:

n = cicli sopportati dal componente al livello di tensione σ_a

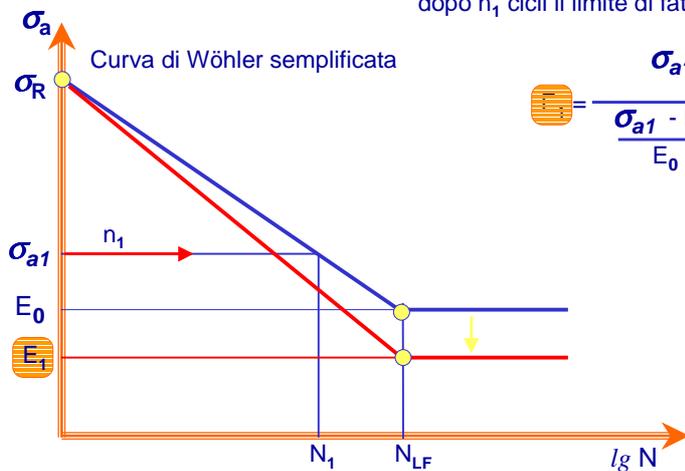
N = cicli che causano rottura al livello di tensione σ_a

E_0 = limite di fatica del materiale non danneggiato

Modelli di accumulo del danno

Teoria di Henry

dopo n_1 cicli il limite di fatica si riduce al valore



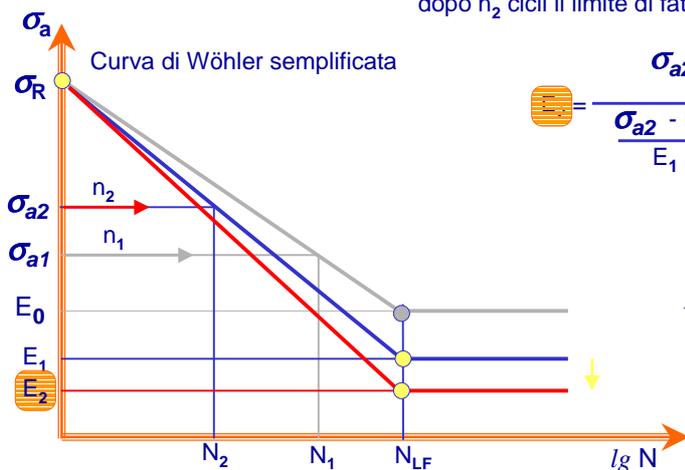
$$\sigma_{a2} = \frac{\sigma_{a1} \left(1 - \frac{n_1}{N_1} \right)}{\frac{\sigma_{a1} - E_0}{E_0} + \left(1 - \frac{n_1}{N_1} \right)}$$

$$D_1 = \frac{E_0 - E_1}{E_0}$$

Modelli di accumulo del danno

Teoria di Henry

dopo n_2 cicli il limite di fatica si riduce al valore



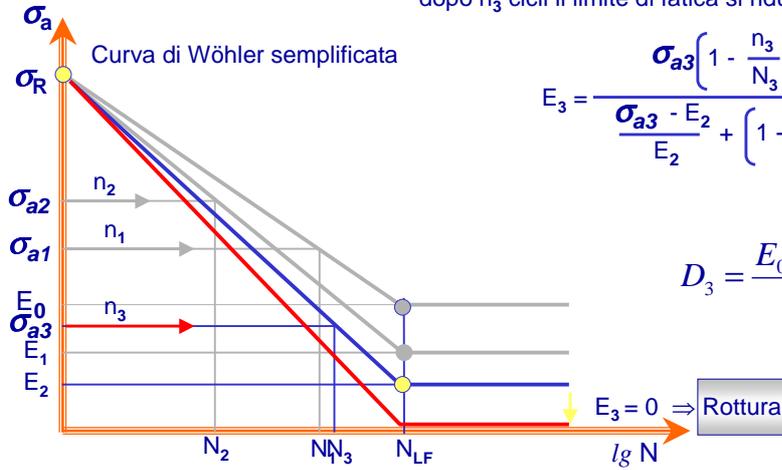
$$\sigma_{a2} = \frac{\sigma_{a1} \left(1 - \frac{n_2}{N_2} \right)}{\frac{\sigma_{a1} - E_1}{E_1} + \left(1 - \frac{n_2}{N_2} \right)}$$

$$D_2 = \frac{E_0 - E_2}{E_0}$$

Modelli di accumulo del danno

Teoria di Henry

dopo n_3 cicli il limite di fatica si riduce al valore



$$E_3 = \frac{\sigma_{a3} \left(1 - \frac{n_3}{N_3} \right)}{\frac{\sigma_{a3} - E_2}{E_2} + \left(1 - \frac{n_3}{N_3} \right)}$$

$$D_3 = \frac{E_0 - E_3}{E_0}$$

$E_3 = 0 \Rightarrow$ Rottura

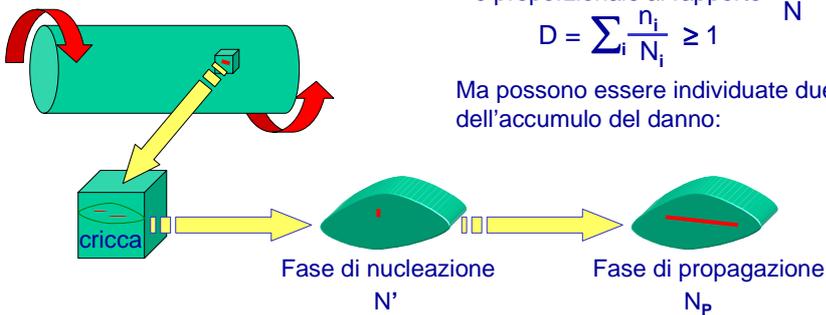
Modelli di accumulo del danno

Teoria bilineare di Manson

Il danno accumulato dal materiale per effetto del carico ciclico è proporzionale al rapporto $\frac{n}{N}$

$$D = \sum_i \frac{n_i}{N_i} \geq 1$$

Ma possono essere individuate due fasi dell'accumulo del danno:



$N_f = N' + N_p = n^\circ$ di cicli che causano la rottura

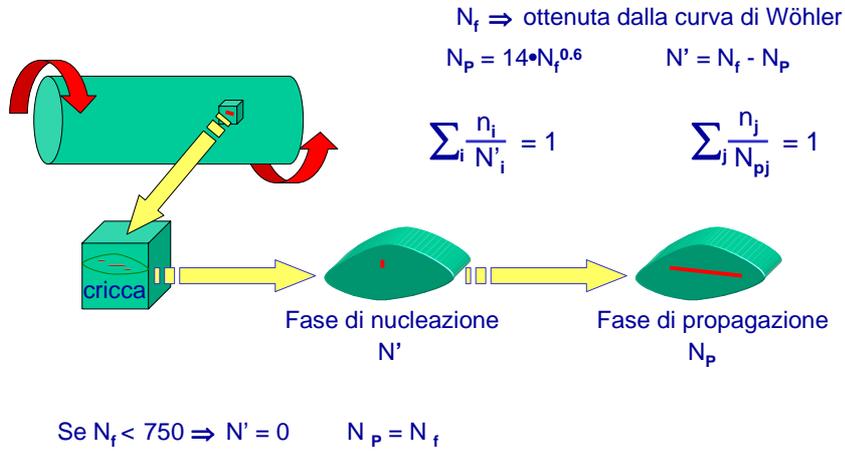
$N_p = P \cdot N_f^p \rightarrow$ N° di cicli necessari alla propagazione del difetto

$N' = N_f - N_p \rightarrow$ N° di cicli necessari alla nucleazione del difetto

Caratteristiche del materiale \rightarrow Per molti materiali da costruzioni meccaniche $P = 14$ e $p = 0.6$

Modelli di accumulo del danno

Teoria bilineare di Manson



Modelli di accumulo del danno

Applicazione: esercizio 1

Curva di Wöhler (99%)

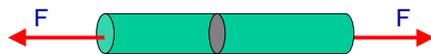
Spettro di carico

$F = \pm$ A)	98000 N	1.200 cicli
B)	54000 N	7.000 cicli
C)	29000 N	50.000 cicli

Tensione	N° di cicli
1160 MPa	100
1104 MPa	1350
1035 MPa	3500
966 MPa	7100
897 MPa	14200
828 MPa	28000
759 MPa	55500
690 MPa	110000
621 MPa	216000
552 MPa	440000
483 MPa	1980000
469 MPa	∞

La sequenza di carico A) B) C) deve essere ripetuta 3 volte

Calcolare l'area della sezione



Modelli di accumulo del danno

Applicazione: esercizio 2

Curva di Wöhler (99%)

Spettro di carico		Tensione	N° di cicli
$F = \pm$ A) 150 000 N	4.200 cicli	1160 MPa	100
B) 94 000 N	17.000 cicli	1104 MPa	1350
C) 50 000 N	50.000 cicli	1035 MPa	3500
D) 30 000 N	150.000 cicli	966 MPa	7100
		897 MPa	14200
		828 MPa	28000
		759 MPa	55500
		690 MPa	110000
		621 MPa	216000
		552 MPa	440000
		483 MPa	1980000
		469 MPa	∞

La sequenza di carico A) B) C) D) deve essere ripetuta 4 volte

Calcolare l'area della sezione

