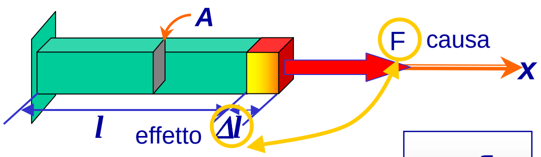
Relazione Tensione Deformazione

Relazione costitutiva in campo elastico



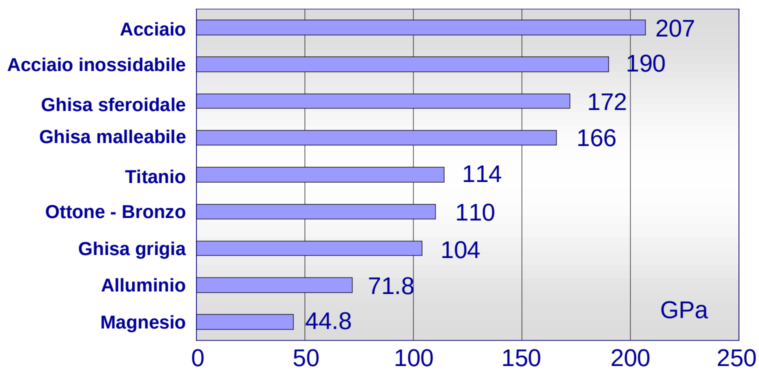
$$F = K \cdot \Delta l \quad \text{dove} \quad K = E\,\frac{A}{l}$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x}}$$

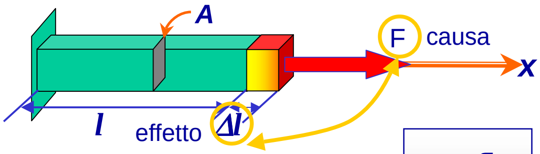
quindi $\Delta l = \frac{F \cdot l}{A \cdot E} = \frac{\sigma_x \cdot l}{E}$, con σ_x

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma_x}{E} \qquad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

Valore del modulo elastico di alcuni materiali



Relazione costitutiva in campo elastico



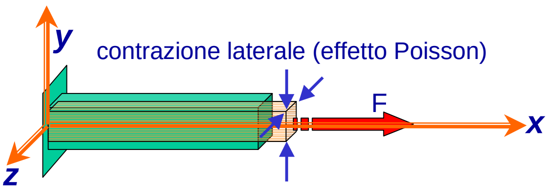
$$E = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x}$$

$$F = K \cdot \Delta l \quad \text{dove} \quad K = E\frac{A}{l}$$

$$\text{quindi} \quad \Delta l = \frac{F \cdot l}{A \cdot E} = \frac{\sigma_x \cdot l}{E} \qquad \left(\frac{F}{A} = \sigma_x\right)$$

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma_x}{E} \qquad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} \qquad \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$$

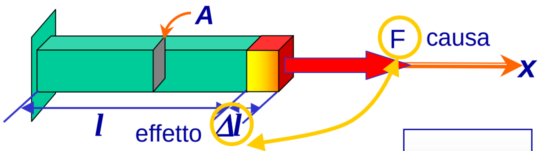


$$\varepsilon_y = -\nu\frac{\sigma_x}{E} \qquad \varepsilon_z = -\nu\frac{\sigma_x}{E}$$

nel caso più generale di stato di tensione triassiale la deformazione $\boldsymbol{\varepsilon_x}$ è data da:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y + \sigma_z}{E}$$

Relazione costitutiva in campo elastico



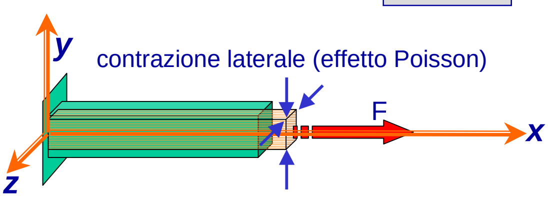
$$E = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x}$$

$$F = K \cdot \Delta l \quad \text{dove} \quad K = E\frac{A}{l}$$

$$\text{quindi} \quad \Delta l = \frac{F \cdot l}{A \cdot E} = \frac{\sigma_x \cdot l}{E} \qquad \left(\frac{F}{A} = \sigma_x\right)$$

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma_x}{E} \qquad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} \qquad \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$$



$$\varepsilon_y = -\nu\frac{\sigma_x}{E} \qquad \varepsilon_z = -\nu\frac{\sigma_x}{E}$$

In modo analogo si possono ottenere $\boldsymbol{\varepsilon_y}$ ed $\boldsymbol{\varepsilon_z}$:

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_x + \sigma_z}{E}$$

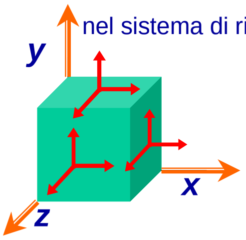
$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \nu\frac{\sigma_x + \sigma_y}{E}$$

Relazione costitutiva in campo elastico

stato di tensione triassiale

relazione costitutiva in campo elastico tra deformazione $\boldsymbol{\varepsilon}$ e la tensione $\boldsymbol{\sigma}$:

nel sistema di riferimento xyz

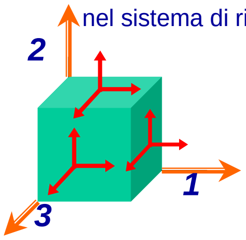


$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right]$$

nel sistema di riferimento principale



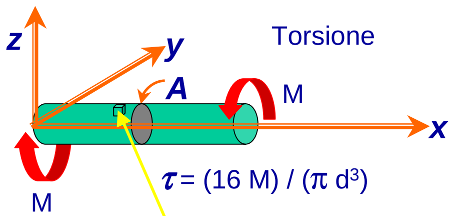
$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \nu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right)\right]$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \nu\left(\sigma_1 + \sigma_3\right)\right]$$

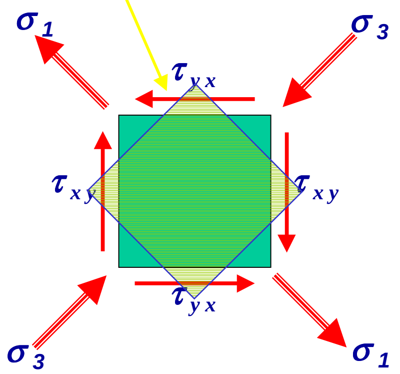
$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \nu\left(\sigma_1 + \sigma_2\right)\right]$$

Relazione costitutiva in campo elastico

Torsione



τ = (16 M) / (π d^3)



$\sigma_3 = -\sigma_1$

Nel caso di torsione pura, con la disposizione degli assi scelta, si ha:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

$$\tau_{xy} \neq 0$$

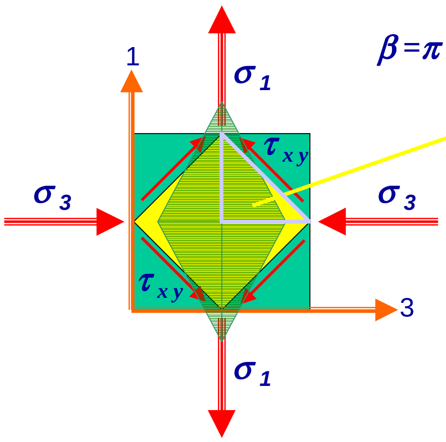
L'equazione cubica dello stato di tensione assume quindi la seguente forma:

$$\sigma^3 - \sigma\,\tau_{xy}^{\,2} = 0$$

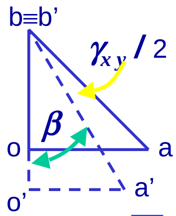
da cui si ottiene:

$$\sigma_1 = \tau_{xy}$$
$$\sigma_2 = 0$$
$$\sigma_3 = -\tau_{xy}$$

Relazione costitutiva in campo elastico



$\beta = \pi/4 - \gamma_{xy}/2$



$$tg(\pi/4 - \gamma_{xy}/2) = \frac{\overline{o'a'}}{\overline{o'b'}}$$

$$\frac{\overline{o'a'}}{\overline{o'b'}} = \frac{\overline{oa}\,(1+\varepsilon_3)}{\overline{ob}\,(1+\varepsilon_1)} \qquad \frac{\overline{oa}}{\overline{ob}} = 1$$

$$tg(\pi/4 - \gamma_{xy}/2) = \frac{(1+\varepsilon_3)}{(1+\varepsilon_1)}$$

$$\Downarrow$$

$$tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{(1 + tg\alpha\, tg\beta)} \Rightarrow tg(\pi/4 - \gamma_{xy}/2) = \frac{tg\,\pi/4 - tg\,\gamma_{xy}/2}{(1 + tg\,\pi/4\; tg\,\gamma_{xy}/2)}$$

Relazione costitutiva in campo elastico

$$tg(\pi/4 - \gamma_{xy}/2) = \frac{\underbrace{tg\,\pi/4}_{=1} - \underbrace{tg\,\gamma_{xy}/2}_{\cong \gamma_{xy}/2}}{(1 + tg\,\pi/4\; tg\,\gamma_{xy}/2)} = \frac{1 - \gamma_{xy}/2}{1 + \gamma_{xy}/2} = \frac{(1+\varepsilon_3)}{(1+\varepsilon_1)}$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma_3 = -\sigma_1 \Rightarrow \varepsilon_3 = -\varepsilon_1 \Rightarrow \qquad \frac{1 - \gamma_{xy}/2}{1 + \gamma_{xy}/2} = \frac{(1-\varepsilon_1)}{(1+\varepsilon_1)}$$

$$\Downarrow$$

essendo:

$$\varepsilon_1 = 1/E\,[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \Leftarrow \qquad \gamma_{xy} = 2\varepsilon_1$$

si ottiene:

$$\gamma_{xy} = 2/E\,[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

nel caso della torsione pura $\sigma_1 = \tau_{xy}$ e $\sigma_3 = -\tau_{xy}$ e quindi:

$$\gamma_{xy} = 2(1+\nu)\,\sigma_1/E = 2(1+\nu)\,\tau_{xy}/E = \tau_{xy}/G \rightarrow G = E/[2(1+\nu)]$$

Relazione costitutiva in campo elastico

Sollecitazione di taglio:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \qquad \gamma_1 = \frac{\tau_1}{G} \qquad \gamma_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{G} \qquad \gamma_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \qquad \gamma_2 = \frac{\tau_2}{G} \qquad \gamma_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{G} \qquad \gamma_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_3$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \qquad \gamma_3 = \frac{\tau_3}{G} \qquad \gamma_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{G} \qquad \gamma_3 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$$

Relazione costitutiva in campo elastico

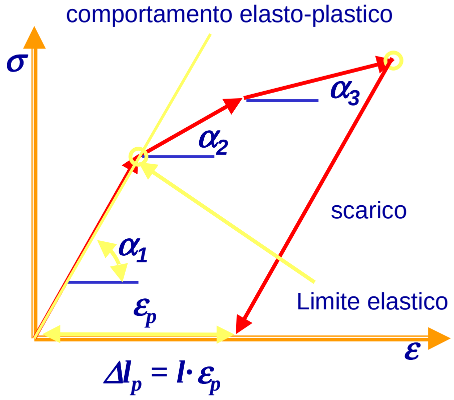
valida in campo elastico (per i materiali isotropi)

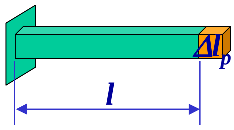
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{array}\right) \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}$$

Le sottomatrici nulle indicano che non c'è accoppiamento tra componenti normali della tensione e distorsione

Come si comporta il materiale
oltre il limite elastico?

comportamento elasto-plastico



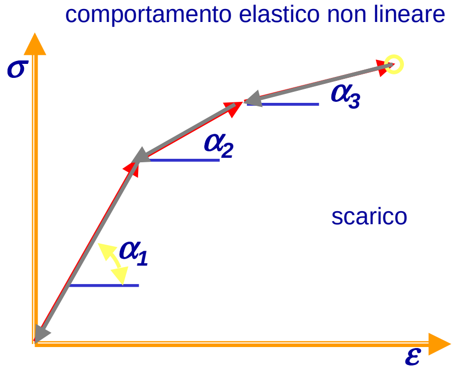


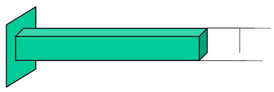
Rimuovendo la forza applicata rimane un allungamento residuo permanente

CDM - Relazione Tensione Deformazione

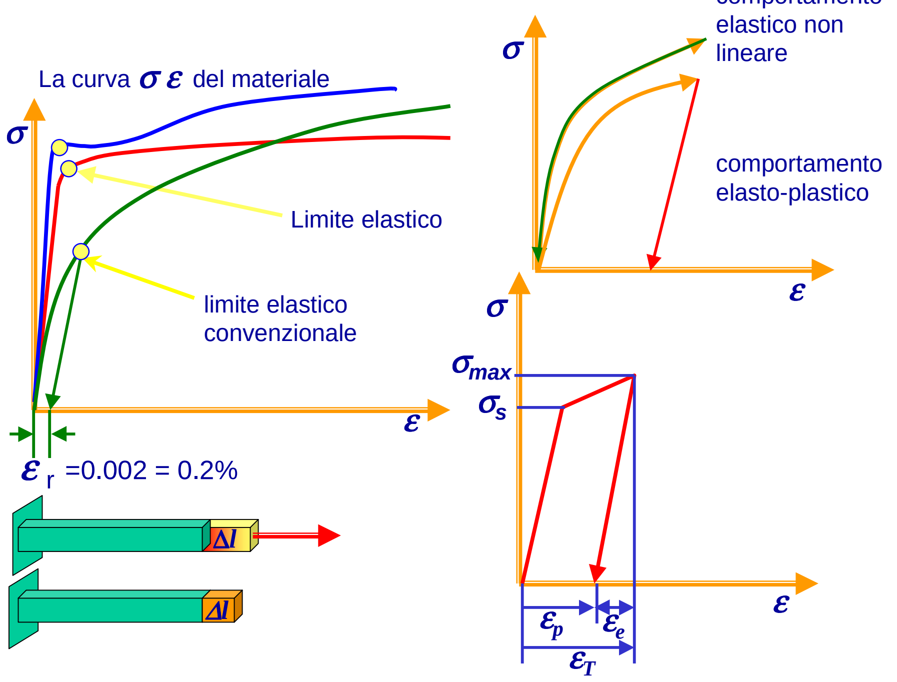
Come si comporta il materiale
oltre il limite elastico?

comportamento elastico non lineare



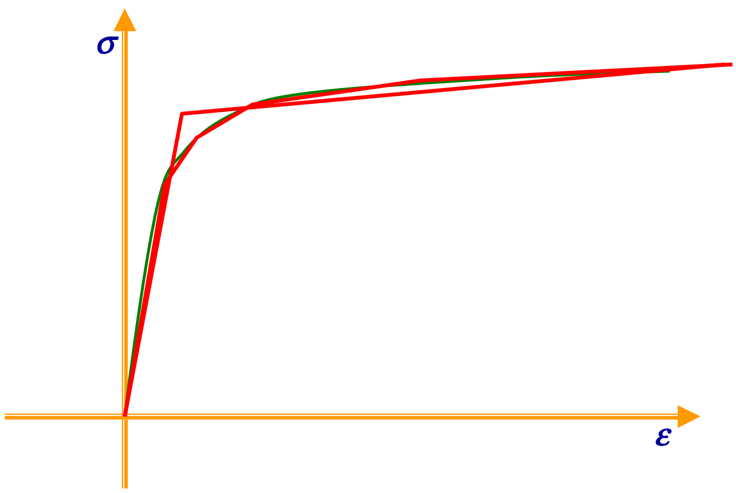


Al termine del ciclo di carico non rimane alcuna deformazione permanente



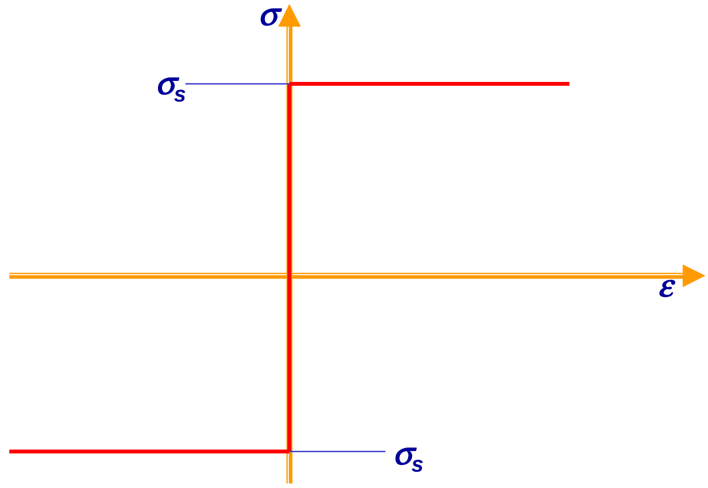
La curva σ ε

Modelli semplificati



La curva σ ε

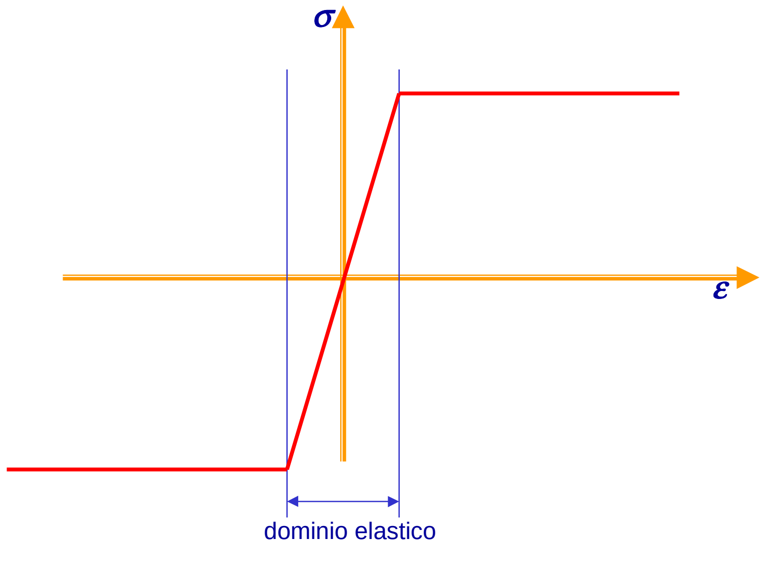
Modello bilineare: rigido-plastico



CDM - Relazione Tensione Deformazione

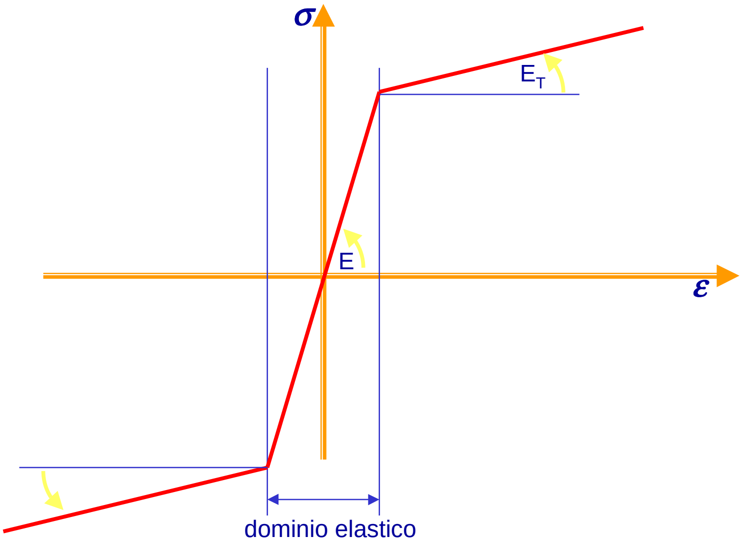
La curva σ ε

Modello bilineare: elasto-plastico perfetto



La curva σ ε

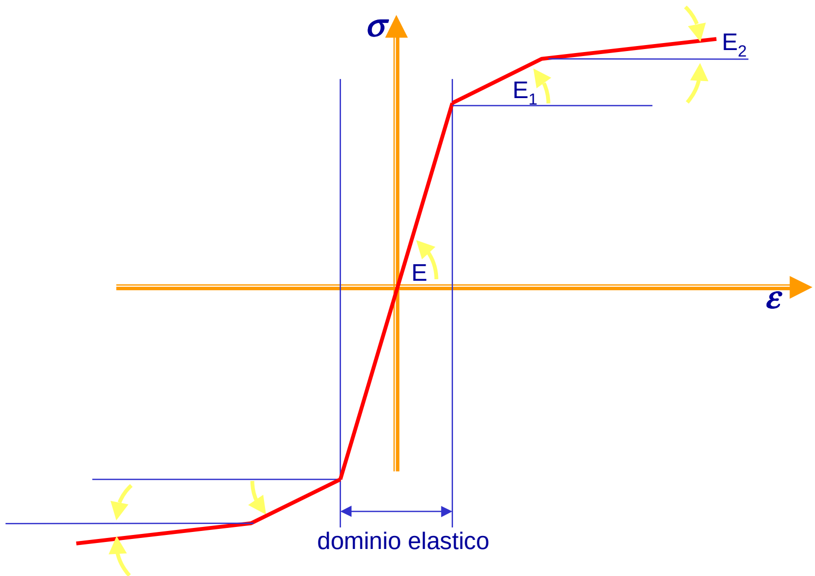
Modello bilineare: elasto-plastico con incrudimento



CDM - Relazione Tensione Deformazione

La curva σ ε

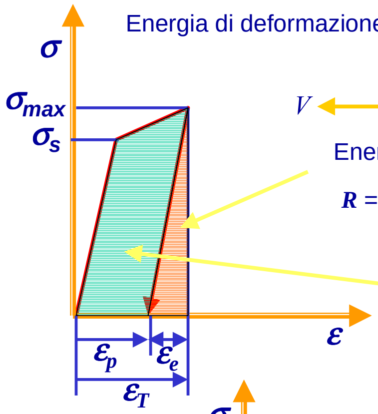
Modello multilineare: elasto-plastico con incrudimento



La curva σ ε

Energia di deformazione $E = \int F dL \rightarrow E = \frac{1}{2} F \cdot \Delta L$

$$V \leftarrow \frac{E}{A \cdot L} = \frac{1}{2}\frac{F}{A}\cdot\frac{\Delta L}{L} \rightarrow E_s = \frac{1}{2}\sigma\cdot\varepsilon$$

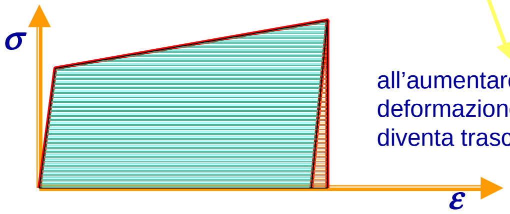


Energia di deformazione elastica

$R = ½\sigma_{max}\bullet\varepsilon_e = \sigma_{max}^2/ 2E$

Energia di deformazione plastica

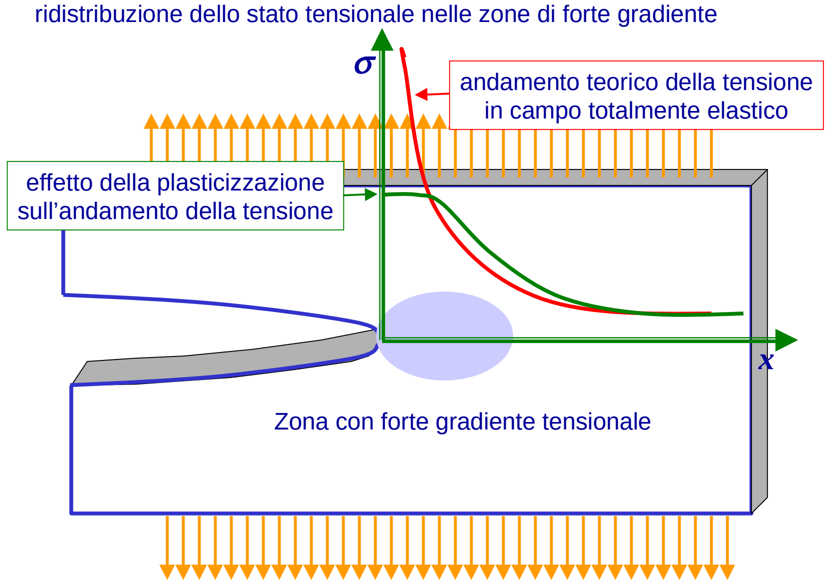
$T = \int \sigma \bullet d\varepsilon - \sigma_{max}^2/ 2E$



all'aumentare della deformazione questo termine diventa trascurabile

La curva σ ε

Effetto benefico del comportamento plastico:
ridistribuzione dello stato tensionale nelle zone di forte gradiente



La curva $\sigma\ \varepsilon$

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{L_f - L_0}{L_0}$$

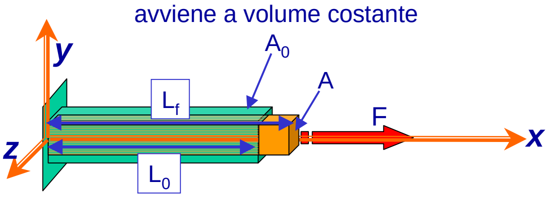
deformazione ingegneristica

$$\delta = \int_{L_0}^{L_f} \frac{dL}{L} = \ln \frac{L_f}{L_0}$$

deformazione logaritmica
detta anche deformazione vera (true strain)

$$\frac{L_f}{L_0} = 1+\varepsilon \qquad \delta = \ln(1+\varepsilon) \qquad \varepsilon = e^{\delta} - 1$$

IPOTESI: in campo plastico la deformazione avviene a volume costante



$$\sigma = F / A_0$$

tensione ingegneristica

$$S = F/A = \frac{F}{A_0}\frac{A_0}{A}$$

$$S = \sigma \frac{A_0}{A} = \sigma e^{\delta} = \sigma (1+\varepsilon)$$

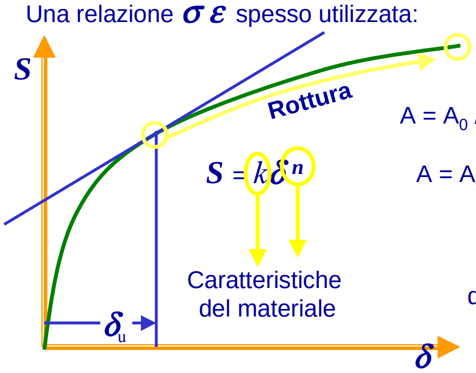
tensione vera
(true stress)

$$A_0 \bullet L_0 = A \bullet L_f \qquad A_0/A = (1+\varepsilon) \qquad \delta = \ln(A_0/A)$$

$$L_f / L_0 = A_0/A \qquad A = A_0/(1+\varepsilon) \qquad A = A_0 / e^{\delta}$$

La curva $\sigma\ \varepsilon$

Una relazione $\sigma\ \varepsilon$ spesso utilizzata:



$$S = k\delta^n$$

Caratteristiche del materiale

$$A = A_0/(1+\varepsilon)$$

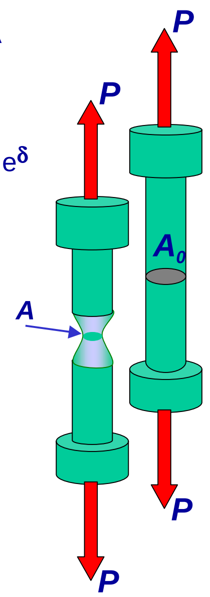
$$A = A_0 / e^{\delta}$$

$$P = S\,A$$

$$P = S\,A_0 / e^{\delta}$$

Condizione
di collasso plastico

$$\frac{dP}{d\delta} = 0$$



$$\frac{dP}{d\delta} = \frac{A_0}{e^{\delta}}\left[\frac{dS}{d\delta} - S\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dS_u}{d\delta} = S_u$$

$$S_u = k\delta_u^{\ n} \quad \Rightarrow \quad n\,k\delta_u^{\ n-1} = k\delta_u^{\ n} \quad \Rightarrow \quad \delta_u = n$$

La curva σ ε

Valori di k ed n misurati sperimentalmente (prova di trazione)

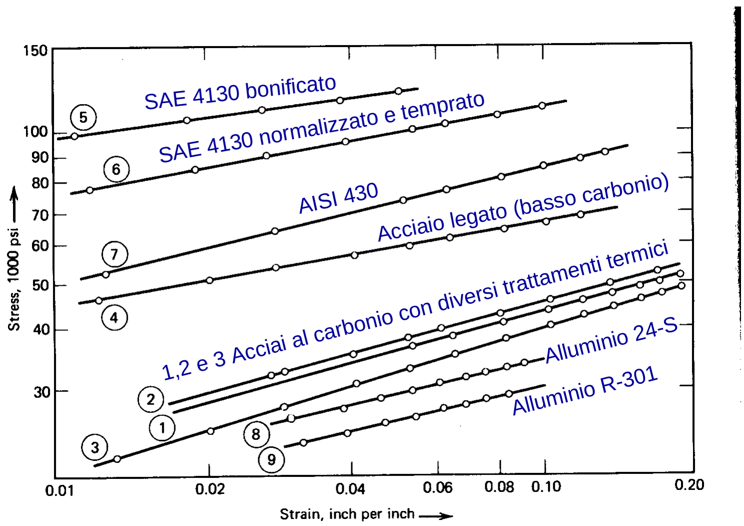
Material Constants n and k for Different Sheet Materials (MPa ≅ PSI / 144.5)

	Material	Treatment	n	k (psi)	Thickness (inch)
1.	0.05 per cent Carbon rimmed steel	Annealed	0.261	77,100	0.037
2.	0.05 per cent Carbon killed steel	Annealed and temper-rolled	.234	73,100	.037
3.	Same as #2, completely decarburized	Annealed in wet hydrogen	.284	75,500	.037
4.	0.05/0.07 per cent Phosphorus low-carbon steel	Annealed	.156	93,330	.037
5.	SAE 4130 steel	Annealed	.118	169,400	.037
6.	SAE 4130 steel	Normalized and temper-rolled	.156	154,500	.037
7.	Type 430 stainless steel (17 per cent Cr)	Annealed	.229	143,000	.050
8.	Alcoa 24-S aluminum	Annealed	.211	55,900	.040
9.	Reynolds R-301 aluminum	Annealed	.211	48,450	.040

Tests by J. R. Low and F. Garafalo.

La curva σ ε

Curve σ ε sperimentali in campo plastico (prova di trazione) presentate in scala logaritmica



Sollecitazione triassiale in campo plastico

IPOTESI:
1) Storia di carico monotona
2) Volume costante $\Delta V=0$
3) Parallelismo tra tensioni e deformazioni principali

$$\delta_1 \parallel \sigma_1 \qquad \delta_2 \parallel \sigma_2 \qquad \delta_3 \parallel \sigma_3$$

(σ = Tensione vera)

4) Il rapporto tra deformazione e tensione tangenziale è uguale per tutte le componenti e si mantiene costante durante la deformazione

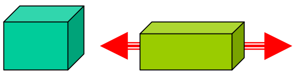
$$\frac{\delta_1 - \delta_2}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{\delta_2 - \delta_3}{\sigma_2 - \sigma_3} = \frac{\delta_3 - \delta_1}{\sigma_3 - \sigma_1} = C_i$$

5) La componente elastica della deformazione è trascurabile rispetto a quella plastica

CDM - Relazione Tensione Deformazione

Sollecitazione triassiale in campo plastico

dalla 2° delle ipotesi precedenti si ha:



V_0 = V_s

$V_0 = abc$

$V_s = abc\,(1+\varepsilon_1)\,(1+\varepsilon_2)\,(1+\varepsilon_3)$

$V_0 = V_s \Rightarrow (1+\varepsilon_1)\,(1+\varepsilon_2)\,(1+\varepsilon_3) = 1$

$\delta = \ln(1+\varepsilon) \Rightarrow \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 0$

dalla 4° delle ipotesi precedenti si ha:

$$\delta_1 - \delta_2 = C_i(\sigma_1 - \sigma_2)$$

$$\delta_1 - \delta_3 = C_i(\sigma_1 - \sigma_3)$$

$$\delta_1 = 2\,C_i/3\,[\sigma_1 - ½(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

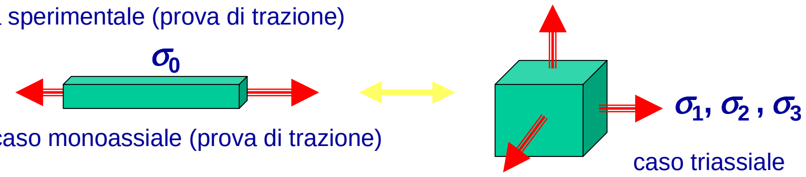
$$\delta_2 = 2\,C_i/3\,[\sigma_2 - ½(\sigma_1 + \sigma_3)]$$

$$\delta_3 = 2\,C_i/3\,[\sigma_3 - ½(\sigma_1 + \sigma_2)]$$

Queste relazioni sono simili a quelle di Hooke, valide in campo elastico, con un valore di ν pari ad ½

Sollecitazione triassiale in campo plastico

C_i è una caratteristica del materiale che può essere valutata con una prova sperimentale (prova di trazione)



IPOTESI → I due stati di tensione sono equivalenti se la tensione τ_0 calcolata nei due casi è la stessa

$$\tau_0 = 1/3\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

alla quale è associata la deformazione tangenziale γ_0

$$\gamma_0 = 2/3\sqrt{(\delta_1 - \delta_2)^2 + (\delta_2 - \delta_3)^2 + (\delta_3 - \delta_1)^2}$$

Sollecitazione triassiale in campo plastico

la tensione τ_0 calcolata nel caso monoassiale ($\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) vale:

$$\tau_0 = 1/3\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = 1/3\sqrt{(\sigma_1)^2 + (-\sigma_1)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_1$$

la deformazione γ_0 calcolata nel caso monoassiale ($\delta_2 = \delta_3 = -\delta_1/2$) vale:

$$\gamma_0 = 2/3\sqrt{(\delta_1 - \delta_2)^2 + (\delta_2 - \delta_3)^2 + (\delta_3 - \delta_1)^2}$$

$$\gamma_0 = 2/3\sqrt{(\delta_1 - \delta_1/2)^2 + ((-\delta_1/2) - (-\delta_1/2))^2 + (-\delta_1/2 - \delta_1)^2} = \sqrt{2}\,\delta_1$$

quindi i valori di τ_0 e γ_0 nel caso monoassiale sono i seguenti:

$$\tau_0 = \frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_1 \qquad \gamma_0 = \sqrt{2}\,\delta_1 \quad \longrightarrow \quad \sigma_1 = \frac{3\tau_0}{\sqrt{2}} \qquad \delta_1 = \frac{\gamma_0}{\sqrt{2}}$$

Sollecitazione triassiale in campo plastico

la deformazione principale nel caso monoassiale si può calcolare come segue

$$\delta_1 = 2\,C_i/3\,[\sigma_1 - ½(\sigma_2 + \sigma_3)] \longrightarrow \delta_1 = 2\,C_i/3\,(\sigma_1)$$

$$\sigma_1 = \frac{3\tau_0}{\sqrt{2}} \qquad \delta_1 = \frac{\gamma_0}{\sqrt{2}} \qquad C_i = \frac{3\,\delta_1}{2\,\sigma_1}$$

$$C_i = \frac{3}{2}\,\frac{\frac{\gamma_0}{\sqrt{2}}}{\frac{3\tau_0}{\sqrt{2}}} = \frac{\gamma_0}{2\tau_0}$$

nell'ipotesi che sia valida la relazione costitutiva $\sigma = k\,\delta^n$ si ha:

$$\frac{3\tau_0}{\sqrt{2}} = k\left[\frac{\gamma_0}{\sqrt{2}}\right]^n \longrightarrow \gamma_0 = \sqrt{2}\left[\frac{3\tau_0}{k\sqrt{2}}\right]^{1/n}$$

Sollecitazione triassiale in campo plastico

dalle relazioni ottenute si può ricavare il valore di C_i in funzione della sola τ_0

$$\left.\begin{aligned} C_i &= \frac{\gamma_0}{2\tau_0} \\ \gamma_0 &= \sqrt{2}\left[\frac{3\tau_0}{k\sqrt{2}}\right]^{1/n} \end{aligned}\right\} \longrightarrow C_i = \frac{\sqrt{2}}{2\tau_0}\left[\frac{3\tau_0}{k\sqrt{2}}\right]^{1/n}$$

è stata ottenuta utilizzando la τ_0 calcolata nel caso monoassiale

Nel caso triassiale la τ_0 dovrà essere calcolata utilizzando tutte le componenti della tensione

$$\tau_0 = 1/3\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

ed introdotta nell'espressione di C_i

Sollecitazione triassiale in campo plastico

Introducendo quindi la τ_0 calcolata nel caso triassiale nell'espressione di C_i si ottiene:

$$C_i = 3(2)^{(-1-n)/2n}(1/k)^{1/n}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]^{(1-n)/2n}$$

Posto: $\alpha = \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}$ $\beta = \dfrac{\sigma_3}{\sigma_1}$ si ottiene:

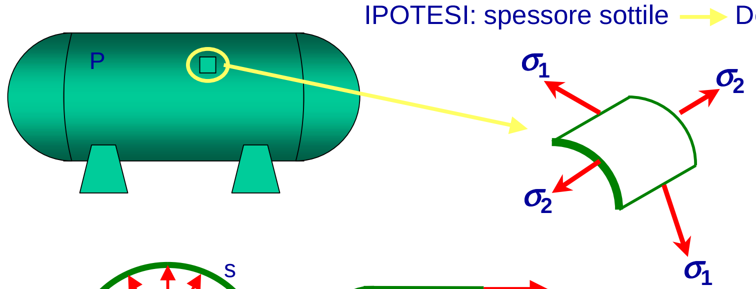
$$\delta_1 = \left[\frac{\sigma_1}{k}\right]^{1/n}\left(\alpha^2 + \beta^2 + 1 - \alpha\beta - \alpha - \beta\right)^{(1-n)/2n}\left(1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right)$$

$$\delta_2 = \left[\frac{\sigma_1}{k}\right]^{1/n}\left(\alpha^2 + \beta^2 + 1 - \alpha\beta - \alpha - \beta\right)^{(1-n)/2n}\left(\alpha - \frac{\beta}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

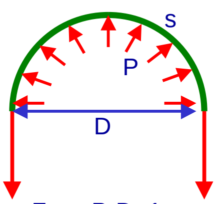
$$\delta_3 = \left[\frac{\sigma_1}{k}\right]^{1/n}\left(\alpha^2 + \beta^2 + 1 - \alpha\beta - \alpha - \beta\right)^{(1-n)/2n}\left(\beta - \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

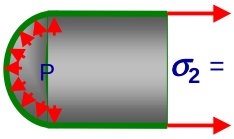
Applicazione: calcolo a collasso plastico di un serbatoio

IPOTESI: spessore sottile → De ≅ Di ≅ Dm



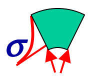
$\sigma_3 = 0$





$$\sigma_2 = \frac{P \bullet \pi \bullet D^2}{4}\ \frac{1}{\pi \bullet D \bullet s} \rightarrow \sigma_2 = \frac{P \bullet D}{4 \bullet s}$$

$$\sigma_1 = \frac{F}{A} = \frac{P \bullet D \bullet 1}{2 \bullet s \bullet 1} = \frac{P \bullet D}{2 \bullet s}$$



$$\frac{\sigma_3}{\sigma_1} = -\frac{2 \bullet s}{D} \rightarrow \sigma_3 \cong 0$$

$\sigma_{3max} = -P$

Applicazione:
calcolo a collasso plastico di un serbatoio

$$\sigma_1 = \frac{P \bullet D}{2 \bullet s} \quad \sigma_2 = \frac{P \bullet D}{4 \bullet s} \quad \sigma_3 = 0 \longrightarrow \alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{1}{2} \quad \beta = \frac{\sigma_3}{\sigma_1} = 0$$

$$\delta_1 = \left(\frac{\sigma_1}{k}\right)^{1/n} \left(\alpha^2 + \beta^2 + 1 - \alpha\beta - \alpha - \beta\right)^{(1-n)/2n} \left(1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right)$$

$$\delta_1 = \left(\frac{\sigma_1}{k}\right)^{1/n} \left((½)^2 + 0 + 1 - 0 - (½) - 0\right)^{(1-n)/2n} \left(1 - ¼ - 0\right)$$

$$\delta_1 = \left(\frac{\sigma_1}{k}\right)^{1/n} \left(3/4\right)^{(1-n)/2n} \left(3/4\right) \qquad \delta_1 = \left(\frac{P \bullet D}{2 \bullet k \bullet s}\right)^{1/n} \left(3/4\right)^{(1+n)/2n}$$

Applicazione:
calcolo a collasso plastico di un serbatoio

$$\sigma_1 = \frac{P \bullet D}{2 \bullet s} \quad \sigma_2 = \frac{P \bullet D}{4 \bullet s} \quad \sigma_3 = 0 \longrightarrow \alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{1}{2} \quad \beta = \frac{\sigma_3}{\sigma_1} = 0$$

$$\delta_2 = \left(\frac{\sigma_1}{k}\right)^{1/n} \left(\alpha^2 + \beta^2 + 1 - \alpha\beta - \alpha - \beta\right)^{(1-n)/2n} \left(\alpha - \frac{\beta}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$\delta_2 = \left(\frac{\sigma_1}{k}\right)^{1/n} \left((½)^2 + 0 + 1 - 0 - (½) - 0\right)^{(1-n)/2n} \left(\frac{1}{2} - 0 - \frac{1}{2}\right)$$

$$\delta_2 = 0$$

Applicazione:
calcolo a collasso plastico di un serbatoio

$$\sigma_1 = \frac{P\bullet D}{2\bullet s} \qquad \sigma_2 = \frac{P\bullet D}{4\bullet s} \qquad \sigma_3 = 0 \quad \longrightarrow \quad \alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{1}{2} \qquad \beta = \frac{\sigma_3}{\sigma_1} = 0$$

$$\delta_3 = \left(\frac{\sigma_1}{k}\right)^{1/n} \left(\alpha^2 + \beta^2 + 1 - \alpha\beta - \alpha - \beta\right)^{(1-n)/2n} \left(\beta - \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$\delta_3 = \left(\frac{\sigma_1}{k}\right)^{1/n} \left((½)^2 + 0 + 1 - 0 - (½) - 0\right)^{(1-n)/2n} \left(0 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)$$

$$\delta_3 = \left(\frac{\sigma_1}{k}\right)^{1/n} \left(3/4\right)^{(1-n)/2n} \left(-3/4\right) \qquad \delta_3 = \left(\frac{P\bullet D}{2\bullet k\bullet s}\right)^{1/n} \left(-3/4\right)^{(1+n)/2n}$$

$$\delta_3 = -\delta_1$$

Applicazione:
calcolo a collasso plastico di un serbatoio

$$\delta_1 = \left(\frac{P\bullet D}{2\bullet k\bullet s}\right)^{1/n} \left(3/4\right)^{(1+n)/2n} \qquad \delta_2 = 0 \qquad \delta_3 = -\delta_1$$

$$\delta_1 = ln\left(\frac{L}{L_0}\right) = ln\left(\frac{\pi\bullet D}{\pi\bullet D_0}\right) \quad \longrightarrow \quad D = D_0\, e^{\delta_1}$$

$$\delta_3 = ln\left(\frac{s}{s_0}\right) \quad \longrightarrow \quad s = s_0\, e^{\delta_3} = s_0\, e^{-\delta_1}$$

$$\delta_1 = \left(\frac{P\bullet D_0\bullet e^{\delta_1}}{2\bullet k\bullet s_0\bullet e^{-\delta_1}}\right)^{1/n} \left(\frac{3}{4}\right)^{(1+n)/2n} \quad \longrightarrow \quad P = \left(\frac{2\bullet k\bullet s_0}{D_0}\right) e^{-2\delta_1} \left(\frac{\delta_1}{\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1+n}{2n}}}\right)^n$$

Applicazione:
calcolo a collasso plastico di un serbatoio

$$P = \left(\frac{2 \cdot k \cdot s_0}{D_0}\right) e^{-2\delta_1} \left(\frac{\delta_1}{\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1+n}{2n}}}\right)^n$$

Condizione di collasso plastico:

$$\frac{dP}{d\delta} = 0$$

$$\frac{dP}{d\delta_1} = \left(\frac{2 \cdot k \cdot s_0}{D_0}\right) \left(\frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1+n}{2n}}}\right)^n \left(-2 \cdot e^{-2\delta_1} \cdot \delta_1^{\,n} + n \cdot \delta_1^{\,n-1} \cdot e^{-2\delta_1}\right) = 0$$

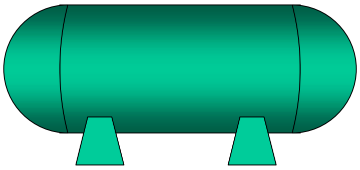
La derivata si annulla se: $\delta_{1u} = \frac{n}{2}$

Sostituendo δ_1 con $\frac{n}{2}$ nella espressione di P si ottiene

$$P_u = \left(\frac{2 \cdot k \cdot s_0}{D_0}\right) e^{-n} \left(\frac{n}{2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1+n}{2n}}}\right)^n$$

P_u è il valore critico della pressione, che provoca il collasso plastico del serbatoio.

Applicazione:
calcolo a collasso plastico di un serbatoio



Esempio numerico Dati:

D_0 = 18 in = 457.2 mm

s_0 = 0.125 in = 3.175 mm

k = 154000 PSI = 1066 MPa

n = 0.156

σ_S = 89000 PSI = 614 MPa

σ_R = 98000 PSI = 676 MPa

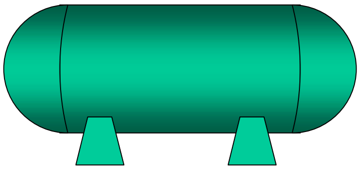
$\left(\text{MPa} \cong \frac{\text{PSI}}{144.4629} \right)$

$$P_u = \left(\frac{2 \cdot k \cdot s_0}{D_0}\right) e^{-n} \left(\frac{n}{2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1+n}{2n}}}\right)^n$$

$$P_u = \left(\frac{2 \cdot 1066 \cdot 3.175}{457.2}\right) e^{-0.156} \left(\frac{0.156}{2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1+0.156}{0.156 \times 2}}}\right)^{0.156} = 10.0474 \text{ MPa}$$

(≅ 100.5 bar)

**Applicazione:
calcolo a collasso plastico di un serbatoio**



Esempio numerico   Dati:

D_0 = 18 in = 457.2 mm   (MPa $\cong \dfrac{\text{PSI}}{144.4629}$)

s_0 = 0.125 in = 3.175 mm

k = 154000 PSI = 1066 MPa

n = 0.156

σ_S = 89000 PSI = 614 MPa

σ_R = 98000 PSI = 676 MPa

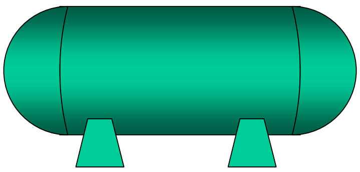
$P_u \cong$ 100.5 bar

$$\sigma_1 = \frac{P \cdot D}{2 \cdot s} \qquad \sigma_2 = \frac{P \cdot D}{4 \cdot s} \qquad \sigma_3 = 0 \qquad \tau_0 = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}$$

$$\sigma_1 = 10.0474\frac{457.2}{2 \cdot 3.175} = 723.4\text{MPa} \qquad \tau_0 = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1)^2+(\sigma_1)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sigma$$

$$\sigma_2 = 10.0474\frac{457.2}{4 \cdot 3.175} = 361.7\text{MPa} \qquad \sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}$$

**Applicazione:
calcolo a collasso plastico di un serbatoio**



Esempio numerico   Dati:

D_0 = 18 in = 457.2 mm   (MPa $\cong \dfrac{\text{PSI}}{144.4629}$)

s_0 = 0.125 in = 3.175 mm

k = 154000 PSI = 1066 MPa

n = 0.156

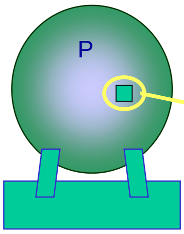
σ_S = 89000 PSI = 614 MPa

σ_R = 98000 PSI = 676 MPa

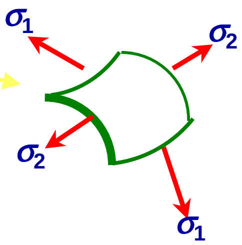
$P_u \cong$ 100.5 bar

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(723.4-361.7)^2+(361.7-0)^2+(0-723.4)^2} = 626\text{MPa}$$

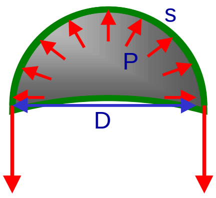
Applicazione:
calcolo a collasso plastico di un serbatoio



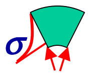
IPOTESI: spessore sottile → $D_e \cong D_i \cong D_m$



$\sigma_3 = 0$



$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{P \cdot \pi \cdot D^2}{4} \; \frac{1}{\pi \cdot D \cdot s} \rightarrow \sigma_1 = \frac{P \cdot D}{4 \cdot s}$$



$$\frac{\sigma_3}{\sigma_1} = -\frac{2 \cdot s}{D} \rightarrow \sigma_3 \cong 0$$

$\sigma_{3max} = -P$

Applicazione:
calcolo a collasso plastico di un serbatoio

$$\sigma_1 = \frac{P \cdot D}{4 \cdot s} \quad \sigma_2 = \frac{P \cdot D}{4 \cdot s} \quad \sigma_3 = 0 \rightarrow \alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 1 \quad \beta = \frac{\sigma_3}{\sigma_1} = 0$$

$$\delta_1 = \left[\frac{\sigma_1}{k}\right]^{1/n} \left[\alpha^2 + \beta^2 + 1 - \alpha\beta - \alpha - \beta\right]^{(1-n)/2n} \left[1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right]$$

$$\delta_1 = \left[\frac{\sigma_1}{k}\right]^{1/n} \left[(1)^2 + 0 + 1 - 0 - (1) - 0\right]^{(1-n)/2n} \left[1 - \frac{1}{2} - 0\right]$$

$$\delta_1 = \left[\frac{\sigma_1}{k}\right]^{1/n} \left[1\right]^{(1-n)/2n} \left[1/2\right]$$

$$\boxed{\delta_1 = \left(\frac{P \cdot D}{4 \cdot k \cdot s}\right)^{1/n} \left(1/2\right)}$$

**Applicazione:
calcolo a collasso plastico di un serbatoio**

$$\sigma_1 = \frac{P \cdot D}{4 \cdot s} \quad \sigma_2 = \frac{P \cdot D}{4 \cdot s} \quad \sigma_3 = 0 \quad \longrightarrow \quad \alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 1 \quad \beta = \frac{\sigma_3}{\sigma_1} = 0$$

$$\delta_2 = \left(\frac{\sigma_1}{k}\right)^{1/n} \left(\alpha^2 + \beta^2 + 1 - \alpha\beta - \alpha - \beta\right)^{(1-n)/2n} \left(\alpha - \frac{\beta}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$\delta_2 = \left(\frac{\sigma_1}{k}\right)^{1/n} \left((1)^2 + 0 + 1 - 0 - (1) - 0\right)^{(1-n)/2n} \left(1 - 0 - \frac{1}{2}\right)$$

$$\delta_2 = \left(\frac{\sigma_1}{k}\right)^{1/n} \left(1\right)^{(1-n)/2n} \left(1/2\right) \qquad \boxed{\delta_2 = \left(\frac{P \cdot D}{4 \cdot k \cdot s}\right)^{1/n} \left(1/2\right)} \qquad \boxed{\delta_2 = \delta_1}$$

CDM - Relazione Tensione Deformazione

**Applicazione:
calcolo a collasso plastico di un serbatoio**

$$\sigma_1 = \frac{P \cdot D}{4 \cdot s} \quad \sigma_2 = \frac{P \cdot D}{4 \cdot s} \quad \sigma_3 = 0 \quad \longrightarrow \quad \alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 1 \quad \beta = \frac{\sigma_3}{\sigma_1} = 0$$

$$\delta_3 = \left(\frac{\sigma_1}{k}\right)^{1/n} \left(\alpha^2 + \beta^2 + 1 - \alpha\beta - \alpha - \beta\right)^{(1-n)/2n} \left(\beta - \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$\delta_3 = \left(\frac{\sigma_1}{k}\right)^{1/n} \left((1)^2 + 0 + 1 - 0 - (1) - 0\right)^{(1-n)/2n} \left(0 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$\delta_3 = \left(\frac{\sigma_1}{k}\right)^{1/n} \left(1\right)^{(1-n)/2n} \left(-1\right) \qquad \delta_3 = \left(\frac{P \cdot D}{4 \cdot k \cdot s}\right)^{1/n} \left(-1\right)$$

$$\boxed{\delta_3 = -\left(\frac{P \cdot D}{4 \cdot k \cdot s}\right)^{1/n}} \qquad \boxed{\delta_3 = -2\,\delta_1}$$

CDM - Relazione Tensione Deformazione

Applicazione:
calcolo a collasso plastico di un serbatoio

$$\delta_1 = \left(\frac{P \bullet D}{4 \bullet k \bullet s}\right)^{1/n} \left(1/2\right) \qquad \delta_2 = \delta_1 \qquad \delta_3 = -2\,\delta_1$$

$$\delta_1 = \ln\left(\frac{L}{L_0}\right) = \ln\left(\frac{\pi \bullet D}{\pi \bullet D_0}\right) \rightarrow D = D_0\, e^{\delta_1}$$

$$\delta_3 = \ln\left(\frac{s}{s_0}\right) \rightarrow s = s_0\, e^{\delta_3} = s_0\, e^{-2\delta_1}$$

$$\delta_1 = \left(\frac{P \bullet D_0 \bullet e^{\delta_1}}{4 \bullet k \bullet s_0 \bullet e^{-2\delta_1}}\right)^{1/n} \left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow P = \left(\frac{4 \bullet k \bullet s_0}{D_0}\right) e^{-3\delta_1} \left(2\,\delta_1\right)^n$$

CDM - Relazione Tensione Deformazione

Applicazione:
calcolo a collasso plastico di un serbatoio

$$P = \left(\frac{4 \bullet k \bullet s_0}{D_0}\right) e^{-3\delta_1} \left(2\,\delta_1\right)^n$$

Condizione di collasso plastico:

$$\frac{dP}{d\delta} = 0$$

$$\frac{dP}{d\delta_1} = \left(\frac{4 \bullet k \bullet s_0}{D_0}\right)\left(2\right)^n \left(-3 \bullet e^{-3\delta_1} \bullet \delta_1^{\,n} + n \bullet \delta_1^{\,n-1} \bullet e^{-3\delta_1}\right) = 0$$

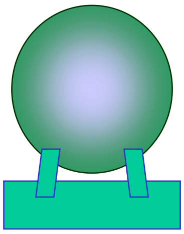
La derivata si annulla se: $\delta_{1u} = \frac{n}{3}$

Sostituendo δ_1 con $\frac{n}{3}$ nella espressione di P si ottiene

$$P_u = \left(\frac{4 \bullet k \bullet s_0}{D_0}\right) e^{-n} \left(\frac{2\,n}{3}\right)^n$$

P_u è il valore critico della pressione, che provoca il collasso plastico del serbatoio.

Applicazione:
calcolo a collasso plastico di un serbatoio



Esempio numerico Dati:

Acciaio SAE 4130

D_0 = 18 in = 457.2 mm

s_0 = 0.125 in = 3.175 mm

k = 154000 PSI = 1066 MPa

n = 0.156

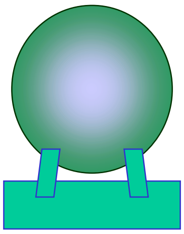
σ_S = 89000 PSI = 614 MPa

σ_R = 98000 PSI = 676 MPa

$$P_u = \left(\frac{4 \cdot k \cdot s_0}{D_0}\right) e^{-n} \left(\frac{2\,n}{3}\right)^{n}$$

$$P_u = \left(\frac{4 \cdot 1066 \cdot 3.175}{457.2}\right) e^{-0.156} \left(\frac{2 \cdot 0.156}{3}\right)^{0.156} = 17.797 \text{ MPa}$$

Applicazione:
calcolo a collasso plastico di un serbatoio



Esempio numerico Dati:

Alluminio Alcoa 24-S

D_0 = 18 in = 457.2 mm

s_0 = 0.125 in = 3.175 mm

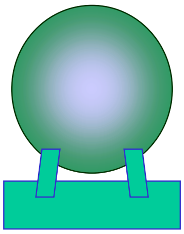
k = 55900 PSI = 384.65 MPa

n = 0.211

$$P_u = \left(\frac{4 \cdot k \cdot s_0}{D_0}\right) e^{-n} \left(\frac{2\,n}{3}\right)^{n}$$

$$P_u = \left(\frac{4 \cdot 384.65 \cdot 3.175}{457.2}\right) e^{-0.211} \left(\frac{2 \cdot 0.211}{3}\right)^{0.211} = 5.72 \text{ MPa}$$

Applicazione:
calcolo a collasso plastico di un serbatoio



Esempio numerico Dati:

Acciaio 0.05% C
D_0 = 18 in = 457.2 mm
s_0 = 0.125 in = 3.175 mm
k = 77100 PSI = 530.52 MPa
n = 0.261

$$P_u = \left(\frac{4 \cdot k \cdot s_0}{D_0}\right) e^{-n} \left(\frac{2\,n}{3}\right)^{n}$$

$$P_u = \left(\frac{4 \cdot 530.52 \cdot 3.175}{457.2}\right) e^{-0.261} \left(\frac{2 \cdot 0.261}{3}\right)^{0.261} = 7.19\ \text{MPa}$$

Relazione Tensione Deformazione