Teorie della rottura

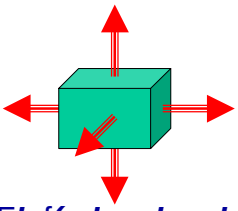
Teorie della rottura

Le teorie della rottura individuano una funzione dello stato tensionale il cui valore è **una misura della** sua **pericolosità**.

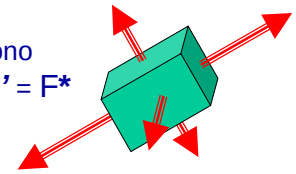
Ogni stato tensionale può quindi essere rappresentato da una quantità scalare, ovvero da un solo numero, che può essere messo in relazione con un valore critico del materiale.

A tale valore scalare viene dato il nome di **tensione equivalente**
Il rapporto tra il valore critico del materiale e la tensione equivalente è il **coefficiente di sicurezza della struttura**.

Concetto di tensione equivalente



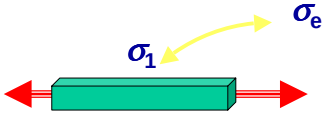
I due stati di tensione sono ugualmente pericolosi se $F' = F^*$



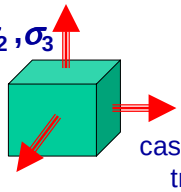
$F'=f(\sigma'_1,\sigma'_2,\sigma'_3)$ $\quad\Longleftrightarrow\quad$ $F^*=f(\sigma_1^*,\sigma_2^*,\sigma_3^*)$

Particolarmente significativo è il confronto con lo stato di tensione che si verifica nella prova del materiale

σ_e $\quad\Longleftrightarrow\quad$ $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$



caso monoassiale (prova di trazione)



caso generale triassiale

Classificazione delle teorie

Le teorie della rottura possono essere divise in tre gruppi

Teorie basate sullo stato di tensione
- ➔Massima tensione normale (Rankine-Lamé-Navier)
- ➔Massima tensione tangenziale (Tresca-Guest)
- ➔Curva della resistenza intrinseca (Coulomb-Mohr)
- ➔Massima tensione tangenziale ottaedrica (Rôs Eichinger)

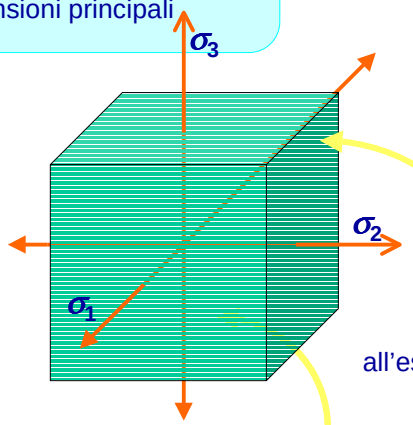
Teorie basate sullo stato di deformazione
- ➔Massima deformazione normale (Poncelet-St. Venant-Grashof)

Teorie basate sulla energia di deformazione
- ➔Massima energia di deformazione (Beltrami-Huber-Haig)
- ➔Massima energia di distorsione (Huber-von Mises-Hency)

Massima tensione normale (Rankine)

superficie critica definita dal criterio di Rankine nello spazio delle tensioni principali

Il materiale subisce danno quando la massima tensione principale raggiunge un valore critico.



σ_t = tensione di rottura a trazione
σ_c = tensione di rottura a compressione

si ha rottura se:

$\sigma_1 > \sigma_t$
$\sigma_2 > \sigma_t$
$\sigma_3 > \sigma_t$

$\sigma_1 < \sigma_c$
$\sigma_2 < \sigma_c$
$\sigma_3 < \sigma_c$

la superficie è la zona critica

all'esterno del volume c'è rottura

all'interno del volume il materiale resiste

Massima tensione normale (Rankine)

Condizione limite

caso triassiale: $\sigma_L = \sigma_1$ oppure $\sigma_L = -\sigma_3$ → $\sigma_e = \sigma_1$ oppure $\sigma_e = -\sigma_3$

caso monoassiale: $\sigma_L = \sigma_1 = \sigma_e$

Nel caso di stato di tensione piano la tensione equivalente vale:

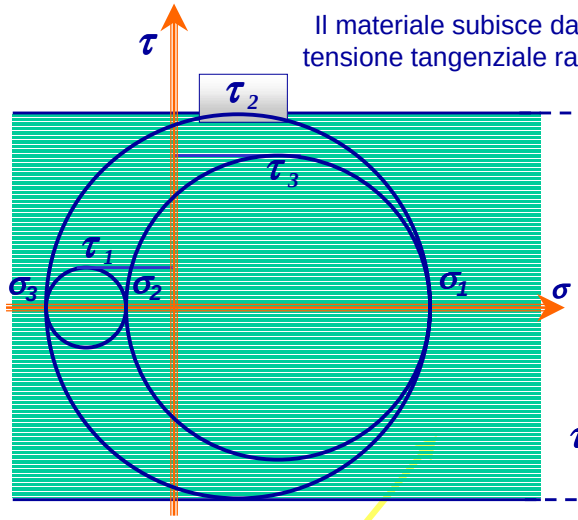
$$\sigma_e = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Nel caso di semplice torsione o taglio la tensione equivalente vale:

$$\sigma_e = \tau_{xy}$$

quindi, in base alla teoria di Rankine, la tensione limite a taglio è pari alla tensione limite misurata nella prova di trazione → $\tau_L = \sigma_L$, $\sigma_L / \tau_L = 1$

Massima tensione tangenziale (Tresca-Guest)



Il materiale subisce danno quando la massima tensione tangenziale raggiunge un valore critico.

$\tau_1 = \pm \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_3)$

$\tau_2 = \pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3)$

$\tau_3 = \pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2)$

$\tau_{max} = \pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3)$

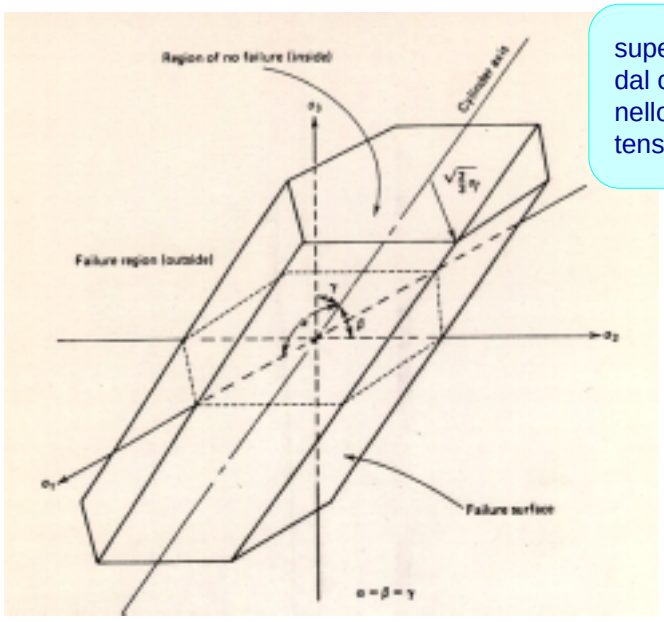
C'è rottura se: $\tau_{max} \geq \tau_L$

τ_L = Valore critico del materiale

all'interno dell'area il materiale resiste

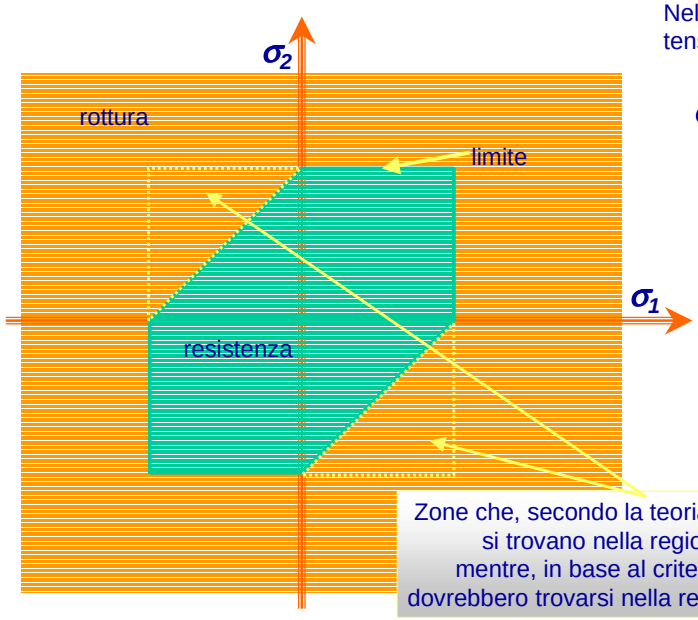
all'esterno dell'area c'è rottura

Massima tensione tangenziale (Tresca-Guest)



superficie critica definita dal criterio di Tresca nello spazio delle tensioni principali

Massima tensione tangenziale (Tresca-Guest)



Nel caso di stato di tensione piano:

$\sigma_1, \sigma_2 \neq 0$
$\sigma_3 = 0$

Zone che, secondo la teoria di Tresca Guest, si trovano nella regione di rottura mentre, in base al criterio di Rankine, dovrebbero trovarsi nella regione di resistenza

CDM - Teorie della rottura

Massima tensione tangenziale (Tresca-Guest)

Condizione limite

caso triassiale: $\tau_L = \pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3)$ → $\sigma_e = \sigma_1 - \sigma_3$

caso monoassiale: $\tau_L = \pm \frac{1}{2} \sigma_1 = \frac{1}{2} \sigma_e$

C'è rottura se $\sigma_e \geq \sigma_L$ ovvero se $\sigma_e \geq 2\tau_L$

quindi, in base alla teoria di Tresca, la tensione limite a taglio è la metà della tensione limite misurata nella prova di trazione → $\tau_L = \sigma_L / 2$, $\sigma_L / \tau_L = 2$

Nel caso di stato di tensione piano la tensione equivalente vale:

$$\sigma_e = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

Nel caso di semplice torsione o taglio la tensione equivalente vale:

$$\sigma_e = 2\tau_{xy}$$

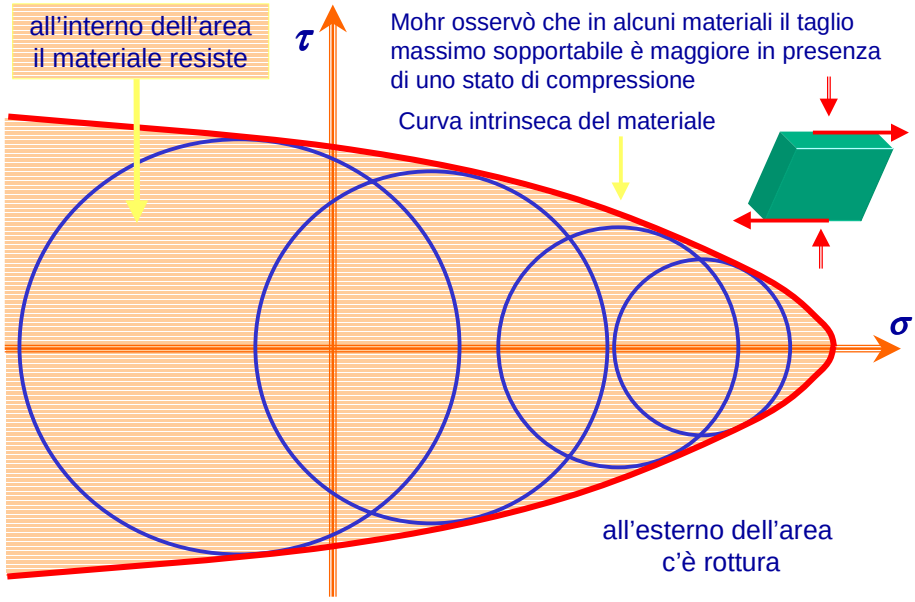
Curva di resistenza intrinseca (Mohr)

Ipotesi dell'attrito interno

all'interno dell'area il materiale resiste

Mohr osservò che in alcuni materiali il taglio massimo sopportabile è maggiore in presenza di uno stato di compressione

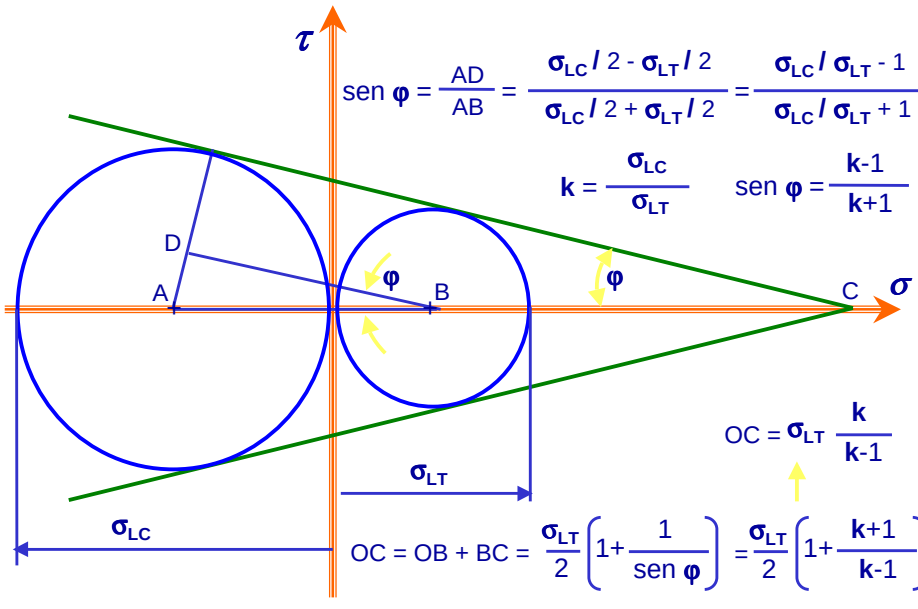
Curva intrinseca del materiale



all'esterno dell'area c'è rottura

CDM - Teorie della rottura

Curva di resistenza intrinseca (Mohr)



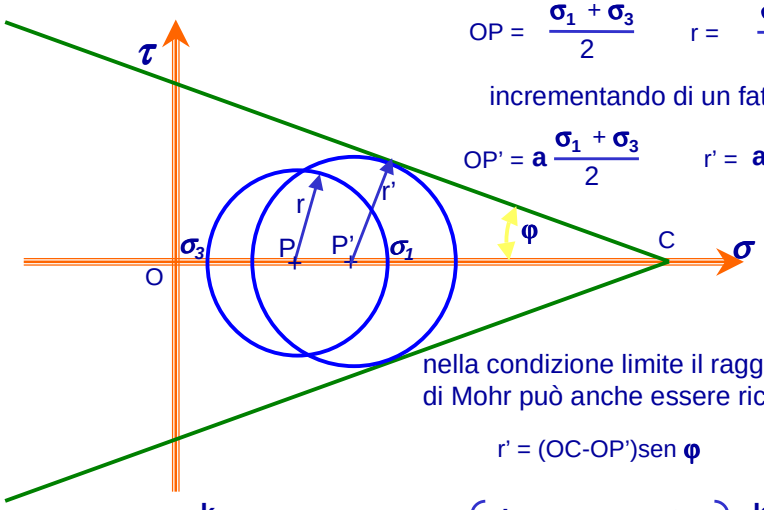
$$\text{sen}\,\varphi = \frac{AD}{AB} = \frac{\sigma_{LC}/2 - \sigma_{LT}/2}{\sigma_{LC}/2 + \sigma_{LT}/2} = \frac{\sigma_{LC}/\sigma_{LT} - 1}{\sigma_{LC}/\sigma_{LT} + 1}$$

$$k = \frac{\sigma_{LC}}{\sigma_{LT}} \qquad \text{sen}\,\varphi = \frac{k-1}{k+1}$$

$$OC = \sigma_{LT}\,\frac{k}{k-1}$$

$$OC = OB + BC = \frac{\sigma_{LT}}{2}\left(1+\frac{1}{\text{sen}\,\varphi}\right) = \frac{\sigma_{LT}}{2}\left(1+\frac{k+1}{k-1}\right)$$

Curva di resistenza intrinseca (Mohr)



$$OP = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \qquad r = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

incrementando di un fattore **a**

$$OP' = a\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \qquad r' = a\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

nella condizione limite il raggio del circolo di Mohr può anche essere ricavato come:

$$r' = (OC - OP')\operatorname{sen}\varphi$$

$$OC = \sigma_{LT}\frac{k}{k-1} \qquad a\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \left(\frac{k}{k-1}\sigma_{LT} - a\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)\frac{k-1}{k+1}$$

Curva di resistenza intrinseca (Mohr)

$$a\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \left(\frac{k}{k-1}\sigma_{LT} - a\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)\frac{k-1}{k+1}$$

La tensione equivalente può essere definita come: $\sigma_e = \dfrac{\sigma_{LT}}{a}$

Quindi, dividendo per **a** e poi introducendo la σ_e si ottiene:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \left(\frac{k}{k-1}\frac{\sigma_{LT}}{a}^{\sigma_e} - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)\frac{k-1}{k+1} \longrightarrow \sigma_e = \sigma_1 - \frac{\sigma_3}{k}$$

Nel caso di stato di tensione piano la tensione equivalente vale:

$$\sigma_e = \frac{k-1}{k}\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{k+1}{k}\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Nel caso di semplice torsione o taglio la tensione equivalente vale:

$$\sigma_e = \frac{k+1}{k}\tau_{xy} \longrightarrow \frac{\sigma_L}{\tau_L} = \frac{k+1}{k}$$

Massima deformazione normale (St. Venant)

superficie critica definita dal criterio di St. Venant nello spazio delle tensioni principali

Il materiale subisce danno quando la massima deformazione principale raggiunge un valore critico.

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \varepsilon_L$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] = \varepsilon_L$$

Nel caso monoassiale si ha:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} = \varepsilon_L = \frac{\sigma_e}{E}$$

Dal confronto si ha:

$$\sigma_e = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)$$

oppure:

$$\sigma_e = \sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)$$

CDM - Teorie della rottura

Massima deformazione normale (St. Venant)

Nel caso di stato di tensione piano la tensione equivalente vale:

$$\sigma_e = (1 - \nu)\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + (1+\nu)\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

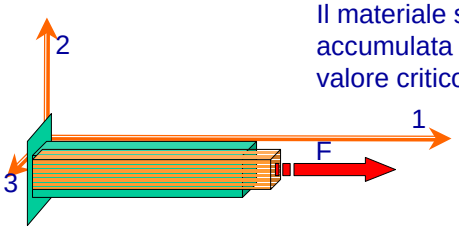
Nel caso di semplice torsione o taglio la tensione equivalente vale:

$$\sigma_e = (1 + \nu)\,\tau_{xy}$$

Il rapporto tra le tensioni limiti in questo caso vale:

$$\frac{\sigma_L}{\tau_L} = (1 + \nu)$$

Massima energia di deformazione (Beltrami)



Il materiale subisce danno quando l'energia accumulata per deformazione raggiunge un valore critico.

$$U_1 = \tfrac{1}{2}F \bullet \Delta L = \tfrac{1}{2}(\sigma_1\, dy\, dz)\, \varepsilon_1\, dx$$

$$U_{1s} = \frac{U_1}{dx\, dy\, dz} = \tfrac{1}{2}\sigma_1\, \varepsilon_1$$

$$U_{2s} = \tfrac{1}{2}\sigma_2\, \varepsilon_2 \qquad U_{3s} = \tfrac{1}{2}\sigma_3\, \varepsilon_3 \qquad U_s = \tfrac{1}{2}(\sigma_1\, \varepsilon_1 + \sigma_2\, \varepsilon_2 + \sigma_3\, \varepsilon_3)$$

$$U_s = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]$$

Nel caso monoassiale si ha: $U_s = \frac{1}{2E}\sigma_1^2 = \frac{1}{2E}\sigma_e^2$

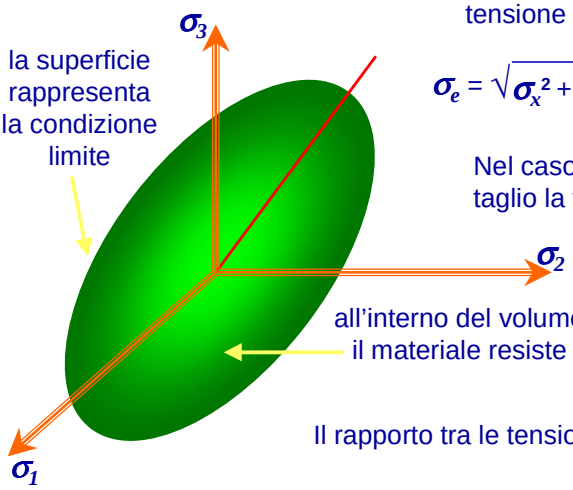
La tensione equivalente si può quindi scrivere come segue:

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)}$$

Massima energia di deformazione (Beltrami)

all'esterno del volume c'è rottura

la superficie rappresenta la condizione limite



all'interno del volume il materiale resiste

Nel caso di stato di tensione piano la tensione equivalente vale:

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\sigma_x\sigma_y + 2(1+\nu)\,\tau_{xy}^2}$$

Nel caso di semplice torsione o taglio la tensione equivalente vale:

$$\sigma_e = \sqrt{2(1+\nu)\,\tau_{xy}^2}$$

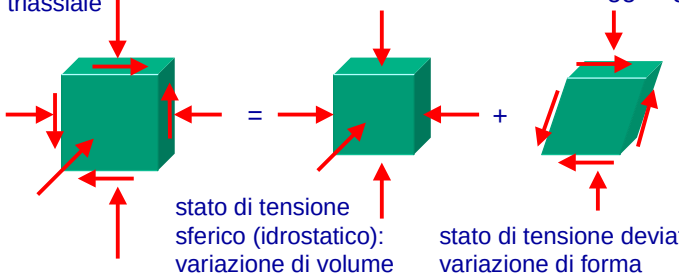
Il rapporto tra le tensioni limiti in questo caso vale:

$$\frac{\sigma_L}{\tau_L} = \sqrt{2(1+\nu)}$$

Massima energia di distorsione (von Mises)

Il materiale subisce danno quando l'energia di distorsione accumulata raggiunge un valore critico.

stato di tensione triassiale



$\sigma_1 = \sigma_1' + \sigma_1''$
$\sigma_2 = \sigma_2' + \sigma_2''$
$\sigma_3 = \sigma_3' + \sigma_3''$

stato di tensione sferico (idrostatico): variazione di volume

stato di tensione deviatorico: variazione di forma

Variazione di volume = $\Delta V = V_f - V_0 = dx\,dy\,dz\,[(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) - 1]$

in campo elastico i termini ε^2 ed ε^3 sono trascurabili

$$\Delta V = dx\,dy\,dz\,[1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_3\varepsilon_1+\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 - 1]$$

$$\Delta V = dx\,dy\,dz\,(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3) \longrightarrow \Delta v = \frac{\Delta V}{dx\,dy\,dz} = (\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)$$

Massima energia di distorsione (von Mises)

$$\Delta v = (\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3) = \frac{1}{E}[\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3 - 2\nu(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)] = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)$$

la variazione di volume dovuta alla parte sferica della tensione è data da:

$$\Delta v_s = 3\varepsilon_s = \frac{1}{E}[3S - 2\nu(3S)] = \frac{1-2\nu}{E}3S$$

Se si assume che la variazione di volume sia dovuta solo all'effetto della parte sferica della tensione si può scrivere:

$$\frac{1-2\nu}{E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3) = \frac{1-2\nu}{E}3S \longrightarrow S = (\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)/3$$

ricordando che l'energia specifica (totale) di deformazione è data da:

$$U_T = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)]$$

la quota parte dovuta al cambiamento di volume è data da:

$$U_V = \frac{1}{2E}[3S^2 - 2\nu(3S^2)] = \frac{3(1-2\nu)}{2E}S^2 = \frac{3(1-2\nu)}{2E}\left[\frac{(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)}{3}\right]^2$$

Massima energia di distorsione (von Mises)

$$U_D = U_T - U_V$$

$$U_D = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\nu(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)\right] - \frac{3(1-2\nu)}{E}\left(\frac{(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)}{3}\right)^2$$

Quindi, l'energia di distorsione nel caso triassiale si può scrivere:

$$U_D = \frac{1}{2}\left(\frac{1+2\nu}{3E}\right)\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]$$

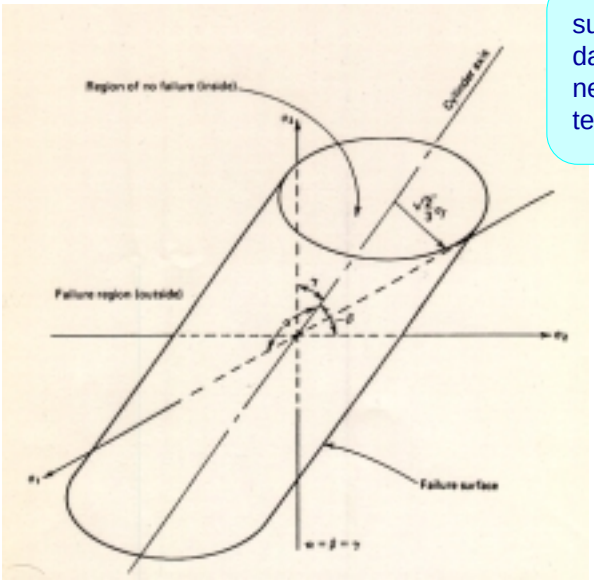
Nel caso monoassiale si ha: $U_D = \left(\frac{1+2\nu}{3E}\right)\sigma_1^2 = \frac{1+2\nu}{3E}\sigma_e^2$

In conclusione, la tensione equivalente è data dalla relazione:

$$\sigma_e = \left(\frac{1}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]\right)^{1/2}$$

CDM - Teorie della rottura

Massima energia di distorsione (von Mises)



superficie critica definita dal criterio di von Mises nello spazio delle tensioni principali

Massima energia di distorsione (von Mises)

Nel caso di stato di tensione piano la tensione equivalente vale:

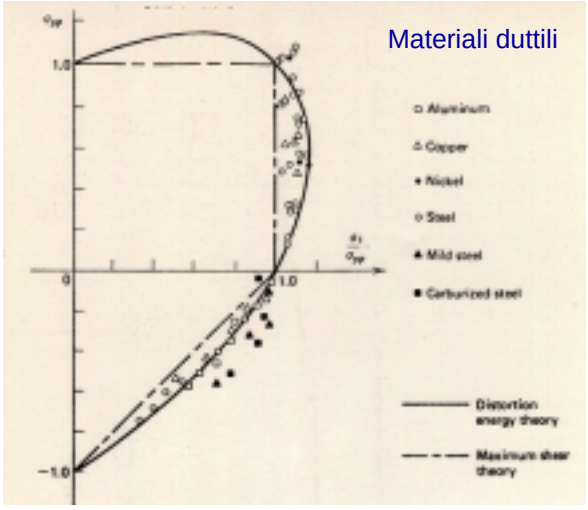
$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2}$$

Nel caso di semplice torsione o taglio la tensione equivalente vale:

$$\sigma_e = \sqrt{3\,\tau_{xy}^2} = \sqrt{3}\,\tau_{xy}$$

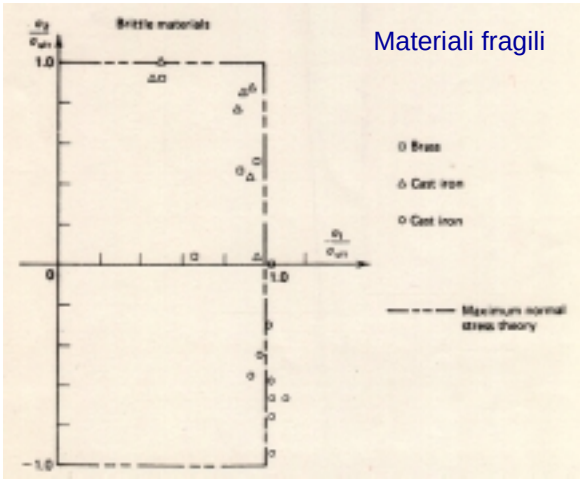
Il rapporto tra le tensioni limiti in questo caso vale: $\dfrac{\sigma_L}{\tau_L} = \sqrt{3}$

Confronto con i dati sperimentali

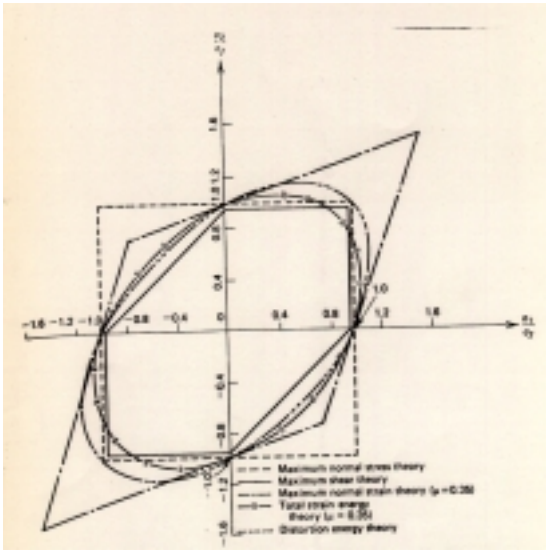


Confronto con i dati sperimentali

Materiali fragili



Confronto tra le varie teorie



Confronto tra le varie teorie

Rapporto caratteristico $\frac{\sigma_L}{\tau_L}$

- ➔Massima tensione normale (Rankine-Lamé-Navier) 1
- ➔Massima tensione tangenziale (Tresca-Guest) 2
- ➔Curva della resistenza intrinseca (Coulomb-Mohr) 1.25÷2
- ➔Massima deformazione normale (Poncelet-St. Venant-Grashof) 1.25
- ➔Massima energia di deformazione (Beltrami-Huber-Haig) 1.61
- ➔Massima energia di distorsione (Huber-von Mises-Hency) 1.73

Valori sperimentali $\frac{\sigma_L}{\tau_L}$

- Materiali fragili = 1 ÷ 1.25
- Materiali duttili = 1.75 ÷ 1.80

Teorie della rottura