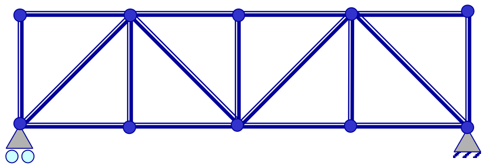
Il Metodo degli Elementi Finiti

CDM - Elementi Finiti

Elemento piano triangolare
a tre nodi

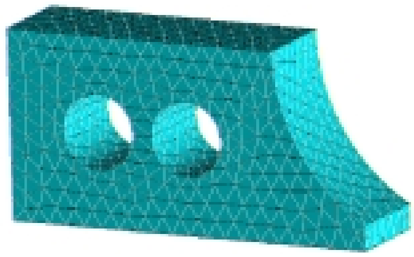
Elemento piano triangolare a tre nodi

In alcune strutture la divisione in porzioni elementari, facilmente schematizzabili, discende immediatamente dal disegno e dalla tecnologia utilizzata per la costruzione.



Le caratteristiche di rigidezza dei vari elementi sono facilmente ricavabili dai modelli strutturali degli elementi (barre assiali, travi)

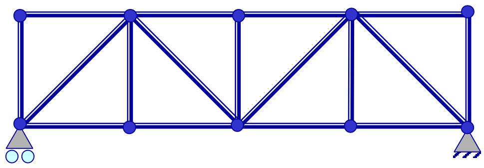
Molto spesso, invece, particolarmente nei componenti meccanici, la struttura è un continuo tridimensionale, che non presenta una preferenziale suddivisione in elementi.



In questi casi si può immaginare comunque di dividere la struttura in un numero finito di elementi, ognuno dei quali sarà caratterizzato da un certo numero di punti nodali nei quali definire le grandezze cinematiche e dinamiche.

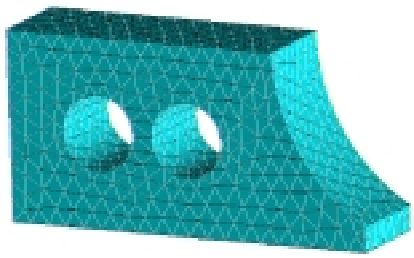
Elemento piano triangolare a tre nodi

In alcune strutture la divisione in porzioni elementari, facilmente schematizzabili, discende immediatamente dal disegno e dalla tecnologia utilizzata per la costruzione.



Le caratteristiche di rigidezza dei vari elementi sono facilmente ricavabili dai modelli strutturali degli elementi (barre assiali, travi)

Tutte le quantità cinematiche e dinamiche della struttura sono definite unicamente nei punti nodali.

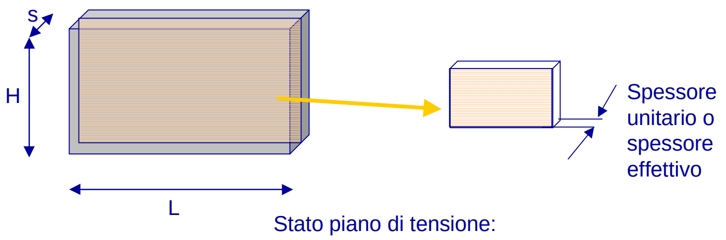


La struttura è schematizzata quindi come un reticolo di elementi solidi la cui rigidezza dipende dalle caratteristiche elastiche del materiale e dalla cinematica dei singoli elementi.

Elemento piano triangolare a tre nodi

In molti casi, pur essendo l'oggetto da studiare un solido continuo, la schematizzazione del comportamento strutturale può essere fatta con un modello continuo 2D, con un sufficiente grado di approssimazione.

Modello solido 2D → **Stato piano di tensione** / Stato piano di deformazione



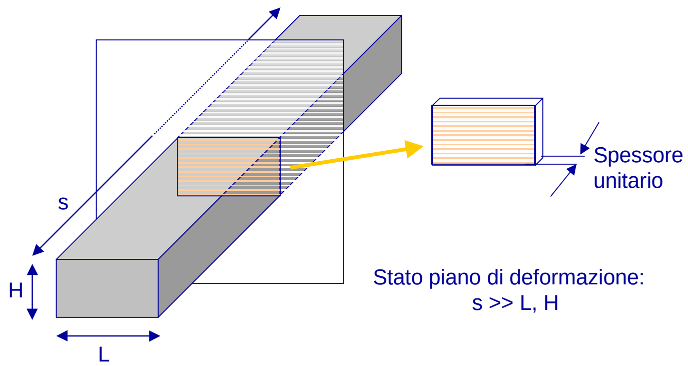
Stato piano di tensione:
s << L, H

CDM - Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a tre nodi

In molti casi, pur essendo l'oggetto da studiare un solido continuo, la schematizzazione del comportamento strutturale può essere fatta con un modello continuo 2D, con un sufficiente grado di approssimazione.

Modello solido 2D → Stato piano di tensione / **Stato piano di deformazione**

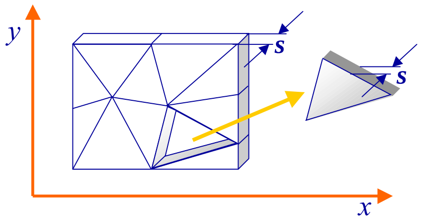


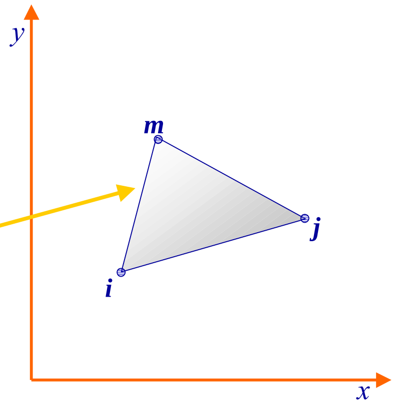
Stato piano di deformazione:
s >> L, H

Elemento piano triangolare a tre nodi

Si consideri un solido (omogeneo ed isotropo) con una dimensione trascurabile rispetto alle altre due, che ne costituisce lo spessore.

Si faccia, inoltre, l'ipotesi che carichi e vincoli, ad esso applicati, siano tali da generare un campo piano di spostamenti e che tale piano sia normale allo spessore.





In queste condizione è possibile rappresentare il comportamento strutturale del solido con un modello piano.

Si divida il solido in una serie di elementi triangololari, di dimensioni finite.

Si immagini ora di estrarre uno di tali triangoli dal continuo e di studiare il suo comportamento riferendolo ad un sistema di coordinate cartesiano.

Per le ipotesi e le assunzioni fatte l'elemento può solo spostarsi, deformandosi, sul piano $x\,y$.

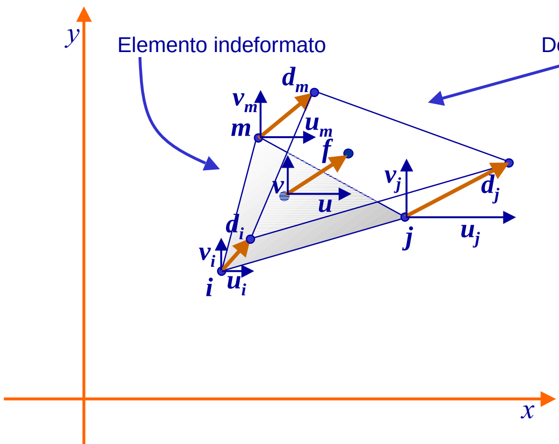
Ogni suo punto ha quindi due componenti di spostamento, che indicheremo come u e v.

CDM - Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a tre nodi

Consideriamo quindi l'elemento "e", dotato di spessore s, nel piano $x\,y$.

L'elemento è un triangolo di vertici i, j ed m



Dopo deformazione

Prendiamo anche in considerazione ciò che accade ad un generico punto interno dell'elemento:

Quando la struttura viene posta sotto carico si deforma e l'elemento "e" subisce un campo di spostamenti, completamente definito dagli spostamenti dei tre nodi di vertice i, j ed m

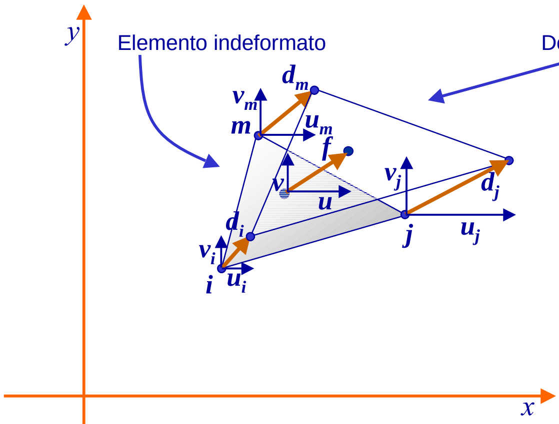
Le componenti di spostamento del generico punto interno dell'elemento devono essere quindi funzioni degli spostamenti nodali.

Elemento piano triangolare a tre nodi

Matrice delle funzioni di forma

Consideriamo quindi l'elemento "e", dotato di spessore s, nel piano $x\,y$.

L'elemento è un triangolo di vertici i, j ed m



Indichiamo con $\{f\}$ il vettore degli spostamenti di un generico punto interno.

Le componenti del vettore $\{f\}$ sono u e v:

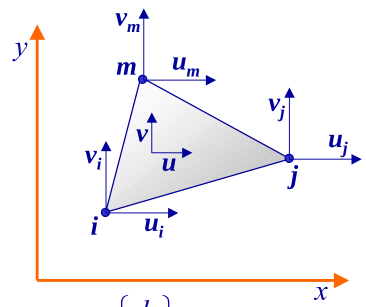
$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

$\{f\}$ dipende dal vettore degli spostamenti nodali di elemento $\{d\}^e$ tramite la matrice $[N]$ che contiene le funzioni di spostamento:

$$\{f\} = [N]\{d\}^e$$

Elemento piano triangolare a tre nodi

Matrice delle funzioni di forma



Se indichiamo con r il numero di gradi di libertà di un punto generico della struttura e con n_e il numero di nodi del singolo elemento "e" il vettore $\{f\}$ è costituito da r termini ed il vettore $\{d\}^e$ è costituito da r x n_e termini.

Nel caso di elemento piano a tre nodi

$r = 2$
$n_e = 3$
$r \times n_e = 6$

$$\{d\}^e = \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \\ d_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d_i & d_j & d_m \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \longrightarrow \{d\}^e = \begin{bmatrix} u_i & v_i & u_j & v_j & u_m & v_m \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\{f\} = [N]\{d\}^e \longrightarrow \{f\} = \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \\ d_m \end{Bmatrix}$$

Dove le matrici $[N]_i$, $[N]_j$ ed $[N]_m$ sono quadrate di dimensioni r x r

Elemento piano triangolare a tre nodi

Matrice delle funzioni di forma

Le matrici $[N]_i$, $[N]_j$ ed $[N]_m$ possono essere viste come il prodotto di una funzione per la matrice identità:

$$[N] = [I]\cdot N'_i \quad [I]\cdot N'_j \quad [I]\cdot N'_m$$

Dove la matrice identità vale:

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e N'_i , N'_j ed N'_m sono funzioni arbitrarie, note con il nome di *funzioni di spostamento* , le quali legano il campo degli spostamenti interni all'elemento al vettore degli spostamenti nodali.

Da esse dipende, dunque, la forma del campo di spostamenti all'interno dell'elemento: infatti sono anche note con il nome di *funzioni di forma*.

Le *funzioni di spostamento* rappresentano quindi uno dei punti cruciali del metodo agli elementi finiti, perché influenzano fortemente il livello di approssimazione della soluzione.

Le *funzioni di spostamento* pur essendo arbitrarie, devono tuttavia essere scelte in base ad alcuni criteri:

1) devono essere in grado di rappresentare correttamente i moti digidi: in tali casi non devono generare deformazioni nell'elemento;

2) devono essere in grado di riprodurre la condizioni di campo uniforme di deformazione all'interno dell'elemento;

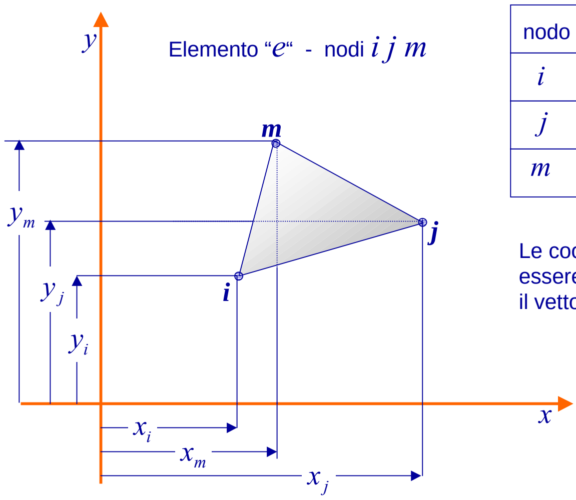
3) le deformazioni in sulla separazione tra gli elementi devono essere finite.

Elemento piano triangolare a tre nodi

Matrice delle funzioni di forma

Le funzioni N'_i , N'_j ed N'_m dipendono dalle coordinate nodali dell'elemento

Elemento "e" - nodi $i\ j\ m$



nodo	coordinate
i	$x_i \quad y_i$
j	$x_j \quad y_j$
m	$x_m \quad y_m$

Le coordinate nodali devono essere note per poter calcolare il vettore degli spostamenti.

Elemento piano triangolare a tre nodi

Matrice delle funzioni di forma

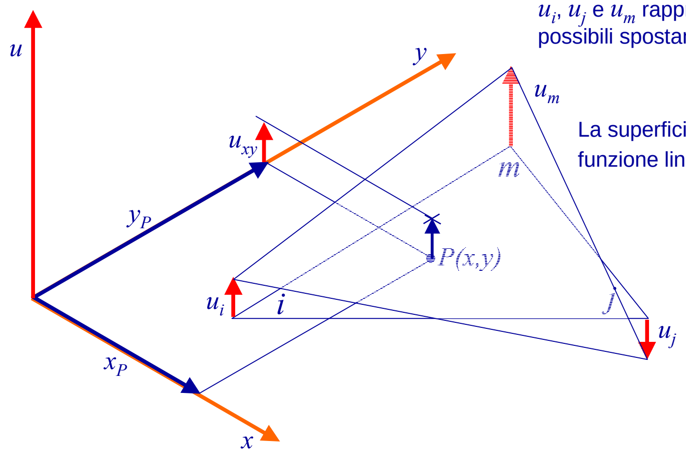
Le più semplici funzioni di spostamento che possono essere pensate sono di tipo lineare:

$$u = q_1 + q_2 x + q_3 y$$
$$v = q_4 + q_5 x + q_6 y$$

Essendo q sei costanti dipendenti dalle coordinate nodali dell'elemento

u_i, u_j e u_m rappresentano tre possibili spostamenti nodali

La superficie rappresenta la funzione lineare di x e y



Elemento piano triangolare a tre nodi

Matrice delle funzioni di forma

Le più semplici funzioni di spostamento che possono essere pensate sono di tipo lineare:

$$u = q_1 + q_2 x + q_3 y$$
$$v = q_4 + q_5 x + q_6 y$$

Essendo q sei costanti dipendenti dalle coordinate nodali dell'elemento

Le costanti possono essere calcolate imponendo che le funzioni di spostamento assumano nei nodi esattamente il valore dello spostamento nodale.

$$u_i = q_1 + q_2 x_i + q_3 y_i \qquad v_i = q_4 + q_5 x_i + q_6 y_i$$
$$u_j = q_1 + q_2 x_j + q_3 y_j \qquad v_j = q_4 + q_5 x_j + q_6 y_j$$
$$u_m = q_1 + q_2 x_m + q_3 y_m \qquad v_m = q_4 + q_5 x_m + q_6 y_m$$

Ne derivano due sistemi, di tre equazioni in altrettante incognite, che consentono di calcolare i valori di q.

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} v_i \\ v_j \\ v_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix}$$

Elemento piano triangolare a tre nodi

Matrice delle funzioni di forma

Le più semplici funzioni di spostamento che possono essere pensate sono di tipo lineare:

$$u = q_1 + q_2 x + q_3 y$$
$$v = q_4 + q_5 x + q_6 y$$

Essendo q sei costanti dipendenti dalle coordinate nodali dell'elemento

Le costanti possono essere calcolate imponendo che le funzioni di spostamento assumano nei nedi esattamente il valore dello spostamento nodale.

$$u_i = q_1 + q_2 x_i + q_3 y_i \qquad v_i = q_4 + q_5 x_i + q_6 y_i$$
$$u_j = q_1 + q_2 x_j + q_3 y_j \qquad v_j = q_4 + q_5 x_j + q_6 y_j$$
$$u_m = q_1 + q_2 x_m + q_3 y_m \qquad v_m = q_4 + q_5 x_m + q_6 y_m$$

Ne derivano due sistemi, di tre equazioni in altrettante incognite, che consentono di calcolare i valori di q.

In modo sintetico si può scrivere:

$$\{u\} = [A']\{q\}$$
$$\{v\} = [A'']\{q\}$$

e le soluzioni si ottengono invertendo le matrici:

$$\{q\} = [A']^{-1}\{u\}$$
$$\{q\} = [A'']^{-1}\{v\}$$

Elemento piano triangolare a tre nodi

Matrice delle funzioni di forma

I valori delle incognite q sono calcolati come segue

Dal primo dei due sistemi si ha:

$$q_1 = \frac{a_i u_i + a_j u_j + a_m u_m}{2\Delta}$$

e dove Δ ha il significato:

$$\Delta = \frac{1}{2}\det\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix}$$

= area del triangolo $i\ j\ m$

Dove a_i, a_j e a_m sono i minori della matrice dei coefficienti che si ottengono escludendo la prima colonna:

$$a_i = x_j y_m - x_m y_j$$
$$a_j = -(x_i y_m - x_m y_i) = x_m y_i - x_i y_m$$
$$a_m = x_i y_j - x_j y_i$$

Matrice dei coefficienti

$$\begin{bmatrix} 1 & \boxed{x_i \quad y_i} \\ 1 & \boxed{x_j \quad y_j} \\ 1 & \boxed{x_m \quad y_m} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{array}{c} + \\ - \\ + \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \end{array}$$

Elemento piano triangolare a tre nodi

Matrice delle funzioni di forma

I valori delle incognite q sono calcolati come segue

Dal primo dei due sistemi si ha:

$$q_2 = \frac{b_i u_i + b_j u_j + b_m u_m}{2\Delta}$$

e dove Δ ha il significato:

$$\Delta = \frac{1}{2}\det\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix}$$

= area del triangolo $i\ j\ m$

Dove b_i, b_j e b_m sono i minori della matrice dei coefficienti che si ottengono escludendo <u>la seconda</u> colonna:

$$b_i = -(y_m - y_j) = y_j - y_m$$

$$b_j = y_m - y_i$$

$$b_m = -(y_j - y_i) = y_i - y_j$$

Matrice dei coefficienti

$$\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{array}{c} + \\ - \\ + \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \end{array}$$

Elemento piano triangolare a tre nodi

Matrice delle funzioni di forma

I valori delle incognite q sono calcolati come segue

Dal primo dei due sistemi si ha:

$$q_3 = \frac{c_i u_i + c_j u_j + c_m u_m}{2\Delta}$$

e dove Δ ha il significato:

$$\Delta = \frac{1}{2}\det\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix}$$

= area del triangolo $i\ j\ m$

Dove c_i, c_j e c_m sono i minori della matrice dei coefficienti che si ottengono escludendo <u>la terza</u> colonna:

$$c_i = x_m - y_j$$

$$c_j = -(x_m - x_i) = x_i - x_m$$

$$c_m = x_j - x_i$$

Matrice dei coefficienti

$$\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{array}{c} + \\ - \\ + \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \end{array}$$

Elemento piano triangolare a tre nodi

Matrice delle funzioni di forma

Gli altri tre valori delle incognite q si ottengono semplicemente introducendo nelle relazioni precedenti le componenti di spostamento v in luogo di u

$$q_4 = \frac{a_i v_i + a_j v_j + a_m v_m}{2\Delta}$$

$$q_5 = \frac{b_i v_i + b_j v_j + b_m v_m}{2\Delta}$$

$$q_6 = \frac{c_i v_i + c_j v_j + c_m v_m}{2\Delta}$$

avendo a_i, a_j, a_m, b_i, b_j, b_m, c_i, c_j e c_m gli stessi valori calcolati prima in funzione delle coordinate nodali dell'elemento e riportati qui per riepilogo.

$$\begin{cases} a_i = x_j y_m - x_m y_j \\ a_j = x_m y_i - x_i y_m \\ a_m = x_i y_j - x_j y_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_i = y_j - y_m \\ b_j = y_m - y_i \\ b_m = y_i - y_j \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_i = x_m - y_j \\ c_j = x_i - x_m \\ c_m = x_j - x_i \end{cases}$$

Elemento piano triangolare a tre nodi

Matrice delle funzioni di forma

A questo punto sono calcolabili le componenti del vettore $\{f\}$ di spostamento dei punti interni all'elemento, u e v , in funzione delle coordinate x e y.

$$u = \frac{1}{2\Delta}\left[(a_i + b_i x + c_i y)\cdot u_i + (a_j + b_j x + c_j y)\cdot u_j + (a_m + b_m x + c_m y)\cdot u_m\right]$$

$$v = \frac{1}{2\Delta}\left[(a_i + b_i x + c_i y)\cdot v_i + (a_j + b_j x + c_j y)\cdot v_j + (a_m + b_m x + c_m y)\cdot v_m\right]$$

Le due relazioni precedenti possono essere scritte in forma matriciale come segue:

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \left[[I]N_i' \quad [I]N_j' \quad [I]N_m'\right] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix}$$

ed in modo più compatto:

$$\{f\} = \left[N_i \quad N_j \quad N_m\right] \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \\ d_m \end{Bmatrix}$$

$$\{f\} = [N]\{d\}^e$$

Elemento piano triangolare a tre nodi

Matrice delle funzioni di forma

A questo punto sono calcolabili le componenti del vettore $\{f\}$ di spostamento dei punti interni all'elemento, u e v , in funzione delle coordinate x e y.

$$u = \frac{1}{2\Delta}\left[(a_i + b_i x + c_i y)\cdot u_i + (a_j + b_j x + c_j y)\cdot u_j + (a_m + b_m x + c_m y)\cdot u_m\right]$$

$$v = \frac{1}{2\Delta}\left[(a_i + b_i x + c_i y)\cdot v_i + (a_j + b_j x + c_j y)\cdot v_j + (a_m + b_m x + c_m y)\cdot v_m\right]$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \left[[I]N'_i \quad [I]N'_j \quad [I]N'_m\right]\{d\}^e$$

Le funzioni e N'_i , N'_j ed N'_m assumono dunque, in questo caso, le espressioni:

$$N'_k = \frac{1}{2\Delta}(a_k + b_k x + c_k y) \quad \text{per } k=i,j,m$$

Anche la quantità 2Δ , che è il determinante della matrice dei coefficienti, dipende solo dalle coordinate nodali dell'elemento:

$$2\Delta = x_j y_m - x_m y_j - x_i\cdot(y_m - y_j) + y_i\cdot(x_m - x_j)$$

Elemento piano triangolare a tre nodi

Matrice di deformazione

Nell'ipotesi di stato piano di tensione di un materiale omogeneo ed isotropo la deformazione è definita, nel sistema di riferimento $x\ y$, da quattro componenti: $\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_{xy} \quad \varepsilon_z$

La componente normale al piano $x\ y$, la ε_z , non contribuisce all'energia elastica essendo la σ_z=0 per ipotesi. Lo stato di deformazione è quindi descritto dalle tre componenti ε_x, ε_y ed ε_{xy} :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

Per quanto calcolato in precedenza le componenti di spostamento u e v sono date dalle relazioni:

$$u = N'_i \cdot u_i + N'_j \cdot u_j + N'_m \cdot u_m$$

$$v = N'_i \cdot v_i + N'_j \cdot v_j + N'_m \cdot v_m$$

e ricordando che: $N'_k = \dfrac{1}{2\Delta}(a_k + b_k x + c_k y)$

Le derivate assumono quindi le espressioni:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial N'_i}{\partial x}u_i + \frac{\partial N'_j}{\partial x}u_j + \frac{\partial N'_m}{\partial x}u_m \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta}(b_i u_i + b_j u_j + b_m u_m)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial N'_i}{\partial y}v_i + \frac{\partial N'_j}{\partial y}v_j + \frac{\partial N'_m}{\partial y}v_m \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2\Delta}(c_i v_i + c_j v_j + c_m v_m)$$

Nell'ipotesi di stato piano di tensione di un materiale omogeneo ed isotropo la deformazione è definita, nel sistema di riferimento $x\ y$, da quattro componenti: $\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_{xy} \quad \varepsilon_z$

La componente normale al piano $x\ y$, la ε_z , non contribuisce all'energia elastica essendo la σ_z=0 per ipotesi. Lo stato di deformazione è quindi descritto dalle tre componenti ε_x, ε_y ed ε_{xy} :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

Per quanto calcolato in precedenza le componenti di spostamento u e v sono date dalle relazioni:

$$u = N'_i \cdot u_i + N'_j \cdot u_j + N'_m \cdot u_m$$

$$v = N'_i \cdot v_i + N'_j \cdot v_j + N'_m \cdot v_m$$

e ricordando che: $N'_k = \dfrac{1}{2\Delta}(a_k + b_k x + c_k y)$

Le derivate assumono quindi le espressioni:

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial N'_i}{\partial y} u_i + \frac{\partial N'_i}{\partial x} v_i + \frac{\partial N'_j}{\partial y} u_j + \frac{\partial N'_j}{\partial x} v_j + \frac{\partial N'_m}{\partial y} u_m + \frac{\partial N'_m}{\partial x} v_m$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta}(c_i u_i + b_i v_i + c_j u_j + b_j v_j + c_m u_m + b_m v_m)$$

È possibile ora esprimere in forma matriciale il legame tra le componenti della deformazione e gli spostamenti nodali:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix} \{d\}^e$$

In forma compatta si ha:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{d\}^e$$

La matrice di deformazione $[B]$ ha dimensioni r_ε x (r x n_e), nel caso in esame 3x6, e può essere divisa in tre sottomatrici 3x2 del tipo:

$$[B_k] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_k & 0 \\ 0 & c_k \\ c_k & b_k \end{bmatrix} \quad \text{per } k=i,j,m$$

La matrice $[B]$ è composta da termini che contengono le derivate spaziali delle funzioni di forma. Essa può quindi essere derivata dalla matrice $[N]$.

Nel caso dell'elemento piano a tre nodi i termini della matrice $[B]$ sono delle costanti, infatti non contengono le variabili x o y .
In questo caso dunque lo stato di deformazione è costante in tutto l'elemento, che risulta poco adatto a rappresentare i gradienti di deformazione.

Elemento piano triangolare a tre nodi

Matrice di deformazione

La deformazione appena calcolata, in funzione degli spostamenti nodali è quella totale.

Per calcolare correttamente lo stato di tensione, è necessario sottrarre alla deformazione totale eventuali deformazioni iniziali, quali ad esempio, le dilatazioni termiche:

$$\{\varepsilon_0\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{x0} \end{Bmatrix} = \alpha \cdot \Delta T \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

valida nel caso di stato piano di tensione

oppure:

$$\{\varepsilon_0\} = (1+\nu) \cdot \alpha \cdot \Delta T \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

valida nel caso di stato piano di deformazione

Elemento piano triangolare a tre nodi

Matrice di elasticità

Lo stato di tensione in un punto dell'elemento è descritto dal vettore $\{\sigma\}$, anch'esso composto da r_ε termini (in questo caso 3).

In condizioni di comportamento elastico del materiale, tale vettore può essere espresso come :

$$\{\sigma\} = [D]\,(\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\}$$

La matrice $[D]$ ha dimensioni r_ε x r_ε (in questo caso 3x3), mentre il vettore $\{\sigma_0\}$ rappresenta un eventuale stato di tensione preesistente nel materiale prima dell'applicazione del carico come, ad esempio, una tensione residua.

Il vettore $\{\sigma\}$ è definito dalle componenti:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

Il legame con le deformazioni in campo elastico è definito dalla legge di Hooke scritta per lo stato piano di tensione:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \tau_{xy}\frac{2(1+\nu)}{E}$$

Elemento piano triangolare a tre nodi

Matrice di elasticità

La matrice $[D]$ si ottiene dalle equazioni di Hooke, ricavando le σ in funzione delle ε:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \longrightarrow [D] = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \tau_{xy}\frac{2(1+\nu)}{E}$$

Stato piano di <u>tensione</u>

Nel caso di stato piano di deformazione la matrice $[D]$ si ottiene tenendo conto che ε_z =0

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] = 0 \longrightarrow \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

dalla legge di Hooke si ha:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right] \longrightarrow \varepsilon_x = \frac{1-\nu^2}{E}\left[\sigma_x - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_y\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right] \longrightarrow \varepsilon_y = \frac{1-\nu^2}{E}\left[\sigma_y - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_x\right]$$

Elemento piano triangolare a tre nodi

Matrice di elasticità

$$\varepsilon_x = \frac{1-\nu^2}{E}\left[\sigma_x - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_y\right] \longrightarrow \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_y$$

$$\varepsilon_y = \frac{1-\nu^2}{E}\left[\sigma_y - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_x\right] \longrightarrow \frac{E}{1-\nu^2}\varepsilon_y = \sigma_y - \frac{\nu}{1-\nu}\left[\frac{E}{1-\nu^2}\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_y\right]$$

Isolando la σ_y si ottiene:

$$\sigma_y = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-\nu}\varepsilon_x\right]$$

A questo punto si ottiene anche l'espressione della σ_x :

$$\sigma_x = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-\nu}\varepsilon_y\right]$$

Elemento piano triangolare a tre nodi

Matrice di elasticità

$$\sigma_x = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-\nu}\varepsilon_y\right]$$

$$\sigma_y = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-\nu}\varepsilon_x\right]$$

Ed infine, esprimendo il legame tra σ ed ε in forma matriciale, si ottiene la matrice $[D]$:

$$[\mathrm{D}] = \frac{\mathrm{E}(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

Stato piano di deformazione

Nonostante che la componente dello stato tensionale σ_z sia diversa da zero, nel caso di deformazione piana, non compie alcun lavoro, essendo nulla la ε_z e, pertanto, essa non viene presa in considerazione: la matrice $[D]$ rimane una 3x3.

Elemento piano triangolare a tre nodi

Matrice di rigidezza

Indichiamo con il vettore $\{F\}^e$ le forze esterne che agiscono sull'elemento e che sono applicate direttamente sui nodi:

$$\{F_k\}^e = \begin{Bmatrix} U_k \\ V_k \end{Bmatrix} \quad \text{per } k=i,j,m$$

Indichiamo, inoltre, con il vettore $\{p\}$ i carichi distribuiti per unità di volume, come le azioni inerziali:

$$\{p\} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}$$

L'equilibrio globale dell'elemento richiede che le forze esterne siano staticamente equivalenti alle tensioni $\{\sigma\}$ agenti sul contorno dell'elemento.

Per trovare la condizione di equilibrio tra le forze esterne e le reazioni interne, dovute allo stato tensionale, si ricorre al principio dei lavori virtuali, → imponendo un campo di spostamenti virtuali il lavoro compiuto dalle forze esterne deve eguagliare quello compiuto dalle forze interne

$$\boxed{L_e = L_i}$$

Elemento piano triangolare a tre nodi

Matrice di rigidezza

$L_e = L_i$ → Il vettore $\{d^*\}^e$ rappresenta il campo di spostamenti virtuali.

Lo spostamento interno virtuale e la deformazione conseguente al campo di spostamenti virtuali sono date dai vettori:

$$\{f^*\} = [N]\{d^*\}^e \rightarrow \{f^*\}^{\mathrm{T}} = \left[\{d^*\}^e\right]^{\mathrm{T}}[N]^{\mathrm{T}}$$

$$\{\varepsilon^*\} = [B]\{d^*\}^e$$

Il lavoro virtuale compiuto dalle forze esterne vale:

$$L_e = \left[\{d^*\}^e\right]^{\mathrm{T}}\{F\}^e + \int_V \{f^*\}^{\mathrm{T}}\{p\}dV = \left[\{d^*\}^e\right]^{\mathrm{T}}\left(\{F\}^e + \int_V [N]^{\mathrm{T}}\{p\}dV\right)$$

Il lavoro virtuale compiuto dalle tensioni interne vale:

$$L_i = \int_V [\varepsilon]^{\mathrm{T}}\{\sigma\}dV = \left[\{d^*\}^e\right]^{\mathrm{T}}\int_V [\mathrm{B}]^{\mathrm{T}}\{\sigma\}dV$$

Uguagliando i lavori si ottiene:

$$\left[\{d^*\}^e\right]^{\mathrm{T}}\left(\{F\}^e + \int_V [N]^{\mathrm{T}}\{p\}dV\right) = \left[\{d^*\}^e\right]^{\mathrm{T}}\int_V [\mathrm{B}]^{\mathrm{T}}\{\sigma\}dV$$

Elemento piano triangolare a tre nodi

Matrice di rigidezza

$$\cancel{\left[\{d^*\}^e\right]^{\mathrm{T}}}\left(\{F\}^e + \int_V [N]^{\mathrm{T}}\{p\}dV\right) = \cancel{\left[\{d^*\}^e\right]^{\mathrm{T}}}\int_V [\mathrm{B}]^{\mathrm{T}}\{\sigma\}dV$$

eliminando lo spostamento virtuale d'elemento si ottiene:

$$\{F\}^e = \int_V [B]^{\mathrm{T}}\{\sigma\}dV - \int_V [N]^{\mathrm{T}}\{p\}dV$$

Ricordando le relazioni:

$$\{\varepsilon\} = [B]\,\{d\}^e$$

$$\{\sigma\} = [D]\,(\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\}$$

$$\{\sigma\} = [D]\,([B]\{\mathrm{d}\}^e - \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\}$$

$$\{F\}^e = \left(\int_V [B]^{\mathrm{T}}[D]\,[B]\,dV\right)\{d\}^e - \int_V [B]^{\mathrm{T}}[D]\,\{\varepsilon_0\}dV + \int_V [B]^{\mathrm{T}}\{\sigma_0\}dV - \int_V [N]^{\mathrm{T}}\{p\}dV$$

Elemento piano triangolare a tre nodi

Matrice di rigidezza

$$\{F\}^e = \left(\int_V [B]^T [D]\, [B]\, dV \right) \{d\}^e - \int_V [B]^T [D]\, \{\varepsilon_0\} dV + \int_V [B]^T \{\sigma_0\} dV - \int_V [N]^T \{p\} dV$$

Questa relazione è del tipo: $\{F\}^e = [K]^e \{d\}^e - \{F_{\varepsilon 0}\}^e - \{F_{\sigma 0}\}^e - \{F_p\}^e$

In conclusione si può scrivere:

$$[K]^e = \int_V [B]^T [D]\, [B]\, dV$$

Matrice di rigidezza di elemento

$$\{F_{\varepsilon 0}\}^e = -\int_V [B]^T [D]\, \{\varepsilon_0\} dV$$

Forze nodali equivalenti alla deformazione iniziale (dilatazione termica)

$$\{F_{\sigma 0}\}^e = \int_V [B]^T \{\sigma_0\} dV$$

Forze nodali equivalenti alla tensione iniziale (tensioni residue)

$$\{F_p\}^e = -\int_V [N]^T \{p\} dV$$

Forze equivalenti a carichi uniformemente distribuiti (pressioni, forze di massa)

Elemento piano triangolare a tre nodi

Matrice di rigidezza

Si procede ora al calcolo della matrice di rigidezza nel caso di elemento piano a tre nodi con stato piano di tensione.

Come si è visto per l'elemento triangolare a deformazione costante i coefficienti della matrice $[B]$ sono delle costanti. L'integrazione è dunque una semplice moltiplicazione.

Indicando con t lo spessore (costante) dell'elemento si può scrivere:

$$[K]^e = [B]^T [D]\, [B]\, V = \begin{bmatrix} B_i^T \\ B_j^T \\ B_m^T \end{bmatrix} [D] \begin{bmatrix} B_i & B_j & B_m \end{bmatrix} \cdot t \cdot \Delta$$

$$[K]^e = \begin{bmatrix} B_i^T D B_i & B_i^T D B_j & B_i^T D B_m \\ B_j^T D B_i & B_j^T D B_j & B_j^T D B_m \\ B_m^T D B_i & B_m^T D B_j & B_m^T D B_m \end{bmatrix} \cdot t \cdot \Delta$$

La generica sottomatrice può essere scritta come segue:

$$[K]_{rs} = [B]_r^T [D]\, [B]_s \cdot t \cdot \Delta$$

La generica sottomatrice :

$$[K]_{rs} = [B]_r^{\mathrm{T}}[D]\,[B]_s \cdot t \cdot \Delta \quad = \frac{1}{2\Delta}\begin{bmatrix} b_r & 0 & c_r \\ 0 & c_r & b_r \end{bmatrix} [D]\, \frac{1}{2\Delta}\begin{bmatrix} b_s & 0 \\ 0 & c_s \\ c_s & b_s \end{bmatrix} \cdot t \cdot \Delta$$

$$[K]_{rs} = \begin{bmatrix} b_r & 0 & c_r \\ 0 & c_r & b_r \end{bmatrix} [D] \begin{bmatrix} b_s & 0 \\ 0 & c_s \\ c_s & b_s \end{bmatrix} \cdot \frac{t}{4\Delta} \cdot$$

Primo prodotto :

$$\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2\Delta}\begin{bmatrix} b_r & 0 & c_r \\ 0 & c_r & b_r \end{bmatrix} \rightarrow \frac{E}{1-\nu^2}\frac{1}{2\Delta}\begin{bmatrix} b_r & \nu b_r & \frac{1-\nu}{2}c_r \\ \nu c_r & c_r & \frac{1-\nu}{2}b_r \end{bmatrix}$$

CDM - Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a tre nodi

Matrice di rigidezza

Secondo prodotto :

$$\frac{1}{2\Delta}\begin{bmatrix} b_s & 0 \\ 0 & c_s \\ c_s & b_s \end{bmatrix}$$

$$\frac{E}{1-\nu^2}\frac{1}{2\Delta}\begin{bmatrix} b_r & \nu b_r & \frac{1-\nu}{2}c_r \\ \nu c_r & c_r & \frac{1-\nu}{2}b_r \end{bmatrix} \rightarrow \frac{E}{1-\nu^2}\frac{1}{4\Delta^2}\begin{bmatrix} b_r b_s + \frac{1-\nu}{2}c_r c_s & \nu b_r c_s + \frac{1-\nu}{2}c_r b_s \\ \nu c_r b_s + \frac{1-\nu}{2}b_r c_s & c_r c_s + \frac{1-\nu}{2}b_r b_s \end{bmatrix}$$

CDM - Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a tre nodi

Matrice di rigidezza

La generica sottomatrice $[K]_{rs}$

$$[K]_{rs} = \frac{E}{1-\nu^2}\frac{1}{4\Delta^2}\begin{bmatrix} b_r b_s + \frac{1-\nu}{2}c_r c_s & \nu b_r c_s + \frac{1-\nu}{2}c_r b_s \\ \nu c_r b_s + \frac{1-\nu}{2}b_r c_s & c_r c_s + \frac{1-\nu}{2}b_r b_s \end{bmatrix} \cdot t \cdot \Delta$$

$$\downarrow$$

$$[K]_{rs} = \frac{E}{1-\nu^2}\frac{t}{4\Delta}\begin{bmatrix} b_r b_s + \frac{1-\nu}{2}c_r c_s & \nu b_r c_s + \frac{1-\nu}{2}c_r b_s \\ \nu c_r b_s + \frac{1-\nu}{2}b_r c_s & c_r c_s + \frac{1-\nu}{2}b_r b_s \end{bmatrix}$$

Elemento piano triangolare a tre nodi

Matrice di rigidezza

La generica sottomatrice $[K]_{rs}$

$$[K]_{rs} = \frac{E}{1-\nu^2}\frac{t}{4\Delta}\begin{bmatrix} b_r b_s + \frac{1-\nu}{2} c_r c_s & \nu b_r c_s + \frac{1-\nu}{2} c_r b_s \\ \nu c_r b_s + \frac{1-\nu}{2} b_r c_s & c_r c_s + \frac{1-\nu}{2} b_r b_s \end{bmatrix}$$

La matrice completa

$$[K]^e = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} & K_{im} \\ K_{ji} & K_{jj} & K_{jm} \\ K_{mi} & K_{mj} & K_{mm} \end{bmatrix}$$

Elemento piano triangolare a tre nodi

Matrice di rigidezza

La matrice completa

$$[K]^e = \frac{E}{1-\nu^2}\frac{t}{4\Delta}\begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ii} & K_{ii} \\ K_{ji} & K_{ji} & K_{ji} \\ K_{mi} & K_{mi} & K_{mi} \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc}
b_i b_i + \frac{1-\nu}{2} c_i c_i & \nu b_i c_i + \frac{1-\nu}{2} c_i b_i & b_i b_j + \frac{1-\nu}{2} c_i c_j & \nu b_i c_j + \frac{1-\nu}{2} c_i b_j & b_i b_m + \frac{1-\nu}{2} c_i c_m & \nu b_i c_m + \frac{1-\nu}{2} c_i b_m \\
\nu c_i b_i + \frac{1-\nu}{2} b_i c_i & c_i c_i + \frac{1-\nu}{2} b_i b_i & \nu c_i b_j + \frac{1-\nu}{2} b_i c_j & c_i c_j + \frac{1-\nu}{2} b_i b_j & \nu c_i b_m + \frac{1-\nu}{2} b_i c_m & c_i c_m + \frac{1-\nu}{2} b_i b_m \\
\hline
b_j b_i + \frac{1-\nu}{2} c_j c_i & \nu b_j c_i + \frac{1-\nu}{2} c_j b_i & b_j b_j + \frac{1-\nu}{2} c_j c_j & \nu b_j c_j + \frac{1-\nu}{2} c_j b_j & b_j b_m + \frac{1-\nu}{2} c_j c_m & \nu b_j c_m + \frac{1-\nu}{2} c_{ij} b_m \\
\nu c_j b_i + \frac{1-\nu}{2} bjc_i & c_j c_i + \frac{1-\nu}{2} b_j b_i & \nu c_j b_j + \frac{1-\nu}{2} b_{ij} c_j & c_j c_j + \frac{1-\nu}{2} b_j b_j & \nu c_j b_m + \frac{1-\nu}{2} b_j c_m & c_j c_m + \frac{1-\nu}{2} b_j b_m \\
\hline
b_m b_i + \frac{1-\nu}{2} c_m c_i & \nu b_m c_i + \frac{1-\nu}{2} c_m b_i & b_m b_j + \frac{1-\nu}{2} c_m c_j & \nu b_m c_j + \frac{1-\nu}{2} c_m b_j & b_m b_m + \frac{1-\nu}{2} c_m c_m & \nu b_m c_m + \frac{1-\nu}{2} c_m b_m \\
\nu c_m b_i + \frac{1-\nu}{2} b_m c_i & c_m c_i + \frac{1-\nu}{2} b_m b_i & \nu c_m b_j + \frac{1-\nu}{2} b_m c_j & c_m c_j + \frac{1-\nu}{2} b_m b_j & \nu c_m b_m + \frac{1-\nu}{2} b_m c_m & c_m c_m + \frac{1-\nu}{2} b_m b_m
\end{array}\right]$$

A questo punto devono essere valutate anche le forze nodali equivalenti

$$\{F_{\varepsilon 0}\}^e = -\int_V [B]^T [D]\,\{\varepsilon_0\} dV$$

Forze nodali equivalenti alla deformazione iniziale (dilatazione termica)

$$\{F_{\sigma 0}\}^e = \int_V [B]^T \{\sigma_0\} dV$$

Forze nodali equivalenti alla tensione iniziale (tensioni residue)

$$\{F_p\}^e = -\int_V [N]^T \{p\} dV$$

Forze equivalenti a carichi uniformemente distribuiti (pressioni, forze di massa)

$$\{F_{\varepsilon 0}\}^e = -[B]^T [D]\,\{\varepsilon_0\} \cdot t \cdot \Delta = -\begin{Bmatrix} B_i^T D\,\varepsilon_0 \\ B_j^T D\,\varepsilon_0 \\ B_m^T D\,\varepsilon_0 \end{Bmatrix} \cdot t \cdot \Delta$$

Per il singolo sottovettore *r-esimo* si ha:

$$\{F_{\varepsilon 0}\}_r = -[B]_r^T [D]\,\{\varepsilon\} \cdot t\Delta = -\begin{bmatrix} b_r & 0 & c_r \\ 0 & c_r & b_r \end{bmatrix} [D] \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot \frac{\alpha T t}{2}$$

Elemento piano triangolare a tre nodi

forze nodali equivalenti

$$\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}\frac{\alpha T t}{2}$$

$$-\begin{bmatrix} b_r & 0 & c_r \\ 0 & c_r & b_r \end{bmatrix} \rightarrow -\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} b_r & \nu b_r & \frac{1-\nu}{2}c_r \\ \nu c_r & c_r & \frac{1-\nu}{2}b_r \end{bmatrix} \rightarrow -\frac{E\ \alpha T t}{2(1-\nu^2)}\begin{Bmatrix} b_r+\nu b_r \\ \nu c_r + c_r \end{Bmatrix}$$

Elemento piano triangolare a tre nodi

forze nodali equivalenti

Il sottovettore r-*esimo* ha dunque l'espressione:

$$\{F_{\varepsilon 0}\}_r = -\frac{E\ \alpha T t}{2(1-\nu^2)}\begin{Bmatrix} b_r+\nu b_r \\ \nu c_r + c_r \end{Bmatrix}$$

Il vettore completo che rappresenta le forze equivalenti ad una dilatazione termica dell'elemento, dovuta ad un incremento T della temperatura, può quindi essere scritto come segue:

$$\{F_{\varepsilon 0}\}^e - \frac{E\ \alpha T t}{2(1-\nu^2)}\begin{Bmatrix} b_i+\nu b_i \\ \nu c_i + c_i \\ b_j+\nu b_j \\ \nu c_j + c_j \\ b_m+\nu b_m \\ \nu c_m + c_m \end{Bmatrix}$$

A questo punto devono essere valutate anche le forze nodali equivalenti

$$\{F_{\varepsilon 0}\}^e = -\int_V [B]^T [D]\{\varepsilon_0\} dV$$

Forze nodali equivalenti alla deformazione iniziale (dilatazione termica)

$$\{F_{\sigma 0}\}^e = \int_V [B]^T \{\sigma_0\} dV$$

Forze nodali equivalenti alla tensione iniziale (tensioni residue)

$$\{F_p\}^e = -\int_V [N]^T \{p\} dV$$

Forze equivalenti a carichi uniformemente distribuiti (pressioni, forze di massa)

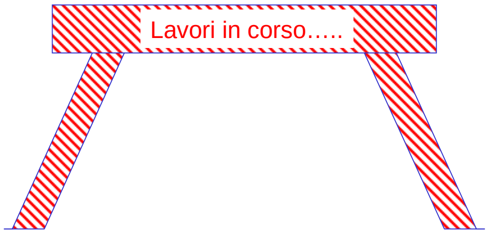
Le forze nodali equilibranti i carichi uniformemente distribuiti sull'elemento possono essere espresse come segue:

$$\{F_p\}^e = -\left(\int_V [N]^T dV\right)\{p\} \quad = -\left(\int_V \begin{Bmatrix} \mathrm{I}N'_i \\ \mathrm{I}N'_j \\ \mathrm{I}N'_m \end{Bmatrix} dV\right)\{p\}$$

Per il singolo sottovettore *r-esimo* si ha:

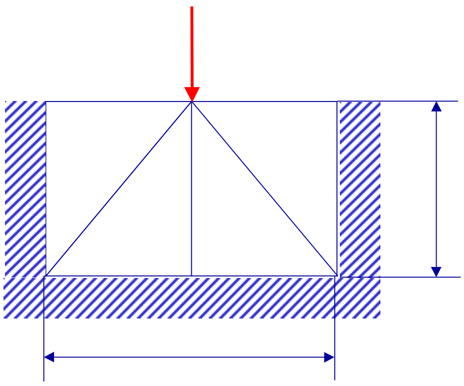
$$\{F_p\}_r = -[\mathrm{I}]\left(\int_V N'_r dV\right)\{p\} \quad = -\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \int_V N'_r dV$$

Il vettore completo, come si è fatto nei casi precedenti, si ottiene facilmente dal sottovettore generico permutando gli indici.



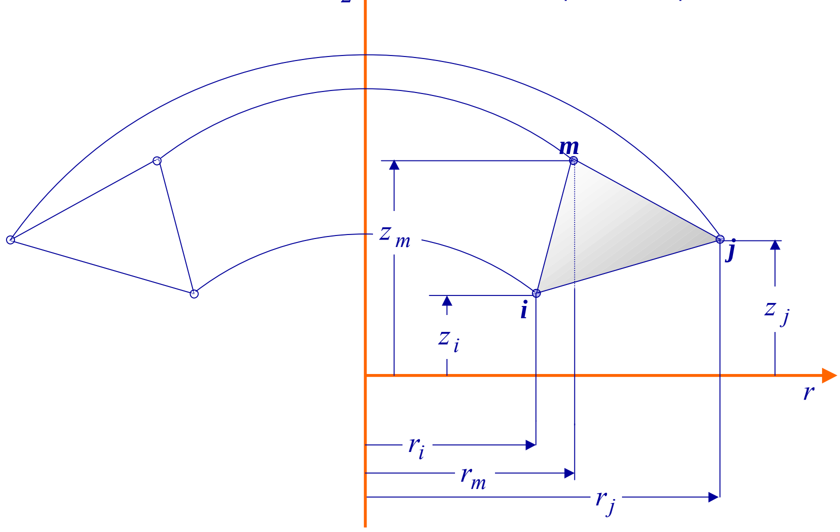
Elemento piano triangolare a tre nodi

Esempio di calcolo

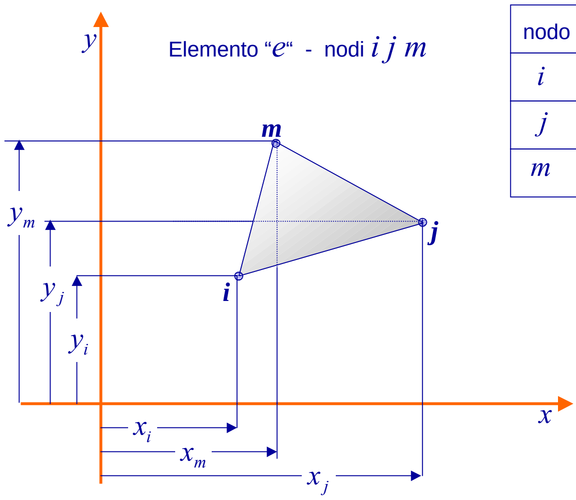


Elemento assialsimmetrico triangolare a tre nodi

L'elemento assialsimmetrico è definito solo nel semipiano con *r* positivo



Elemento "*e*" - nodi $i\ j\ m$

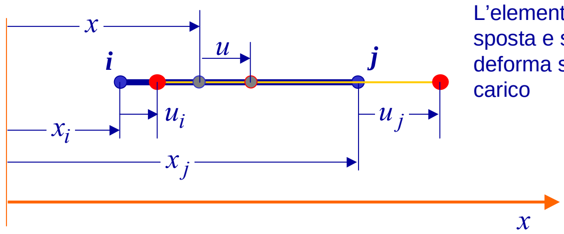


Esempio di calcolo

nodo	coordinate
i	$x_i \quad y_i$
j	$x_j \quad y_j$
m	$x_m \quad y_m$

Elemento asta

Elemento $i\ j$ - 2 nodi x un grado di libertà per nodo: spostamento assiale u



L'elemento di sposta e si deforma sotto carico

Funzione di spostamento

Scelta in modo arbitrario

Funzione lineare

$$u = a + bx$$

I coefficienti a e b dipendono dalla geometria dell'elemento e dagli spostamenti nodali

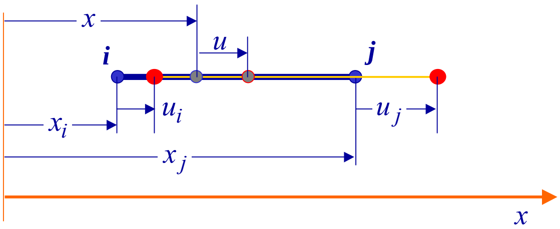
Condizioni al contorno:

$$\begin{cases} u_i = a + bx_i & \rightarrow \quad u_i - bx_i = a \\ u_j = a + bx_j & \rightarrow \quad u_j = u_i - bx_i + bx_j \quad \rightarrow \quad u_j - u_i = b(x_j - x_i) \end{cases}$$

$$\boxed{b = \frac{u_j - u_i}{x_j - x_i}} \qquad \boxed{a = u_i - \frac{u_j - u_i}{x_j - x_i} x_i}$$

Elemento asta

Elemento $i\,j$ - 2 nodi x un grado di libertà per nodo: spostamento assiale u



Funzione di spostamento

$$u = a + bx$$

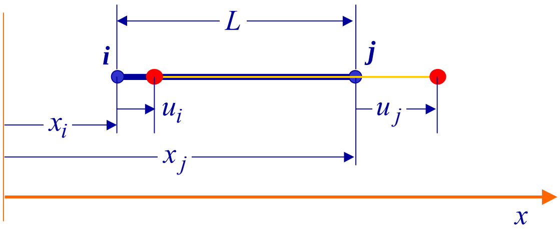
$$u = a + bx \;\rightarrow\; u = u_i - \frac{u_j - u_i}{x_j - x_i} x_i + \frac{u_j - u_i}{x_j - x_i} x$$

$$u = u_i - \frac{x_i}{x_j - x_i} u_j + \frac{x_i}{x_j - x_i} u_i + \frac{x}{x_j - x_i} u_j - \frac{x}{x_j - x_i} u_i$$

$$u = \left(1 - \frac{x - x_i}{x_j - x_i}\right) u_i + \frac{x - x_i}{x_j - x_i} u_j \;\rightarrow\; u = N_i\, u_i + N_j\, u_j \;\rightarrow\; u = [N]\,\{d\}$$

Elemento asta

Elemento $i\,j$ - 2 nodi x un grado di libertà per nodo: spostamento assiale u



Funzione di spostamento

$$u = a + bx$$

$$[N] = \lfloor N_i \quad N_j \rfloor \qquad\qquad x_j - x_i = L$$

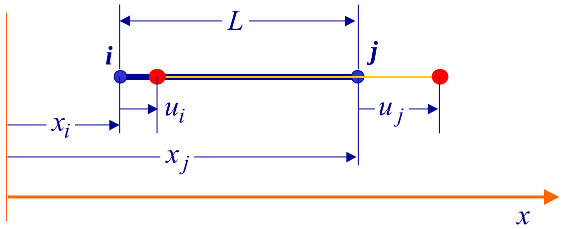
$$N_i = \left(1 - \frac{x - x_i}{x_j - x_i}\right) \;\rightarrow\; N_i = \left(1 - \frac{x - x_i}{L}\right)$$

$$N_j = \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \;\rightarrow\; N_j = \frac{x - x_i}{L}$$

CDM - Elementi Finiti

Elemento asta

Elemento $i\ j$ - 2 nodi x un grado di libertà per nodo: spostamento assiale u



Funzione di spostamento

$$u = a + bx$$

Deformazione $\varepsilon_x = \dfrac{du}{dx}$

$$\varepsilon_x = [B]\ \{d\} \rightarrow \varepsilon_x = \begin{bmatrix} B_i & B_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}$$

$$B_i = \frac{d}{dx} N_i \qquad B_j = \frac{d}{dx} N_j$$

$$[B] = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{L} & \dfrac{1}{L} \end{bmatrix}$$

$$B_i = \frac{d}{dx}\left(1 - \frac{x - x_i}{L}\right) = -\frac{1}{L}$$

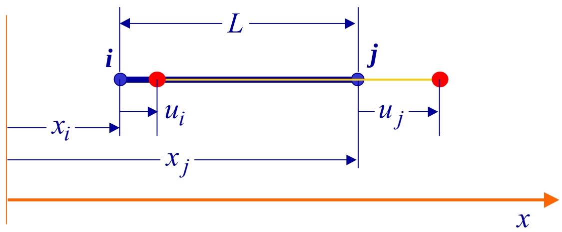
$$\varepsilon_x = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{L} & \dfrac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \frac{u_j - u_i}{L}$$

$$B_j = \frac{d}{dx}\left(\frac{x - x_i}{L}\right) = \frac{1}{L}$$

CDM - Elementi Finiti

Elemento asta

Elemento $i\ j$ - 2 nodi x un grado di libertà per nodo: spostamento assiale u



Funzione di spostamento

$$u = a + bx$$

Tensione $\{\sigma\} = [D]\ \{\varepsilon\}$

La matrice di tensione in questo caso si riduce semplicemente al modulo di Young $\quad [D] = E \qquad \sigma_x = E\ \varepsilon_x$

Ci sono ora tutti gli elementi per calcolare la matrice di rigidezza dell'elemento asta:

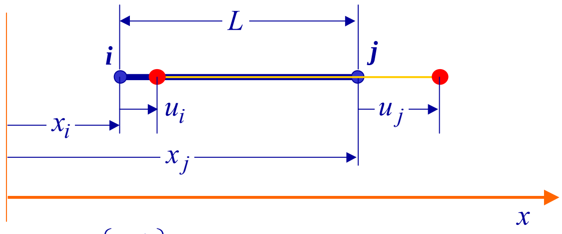
$$[K] = \int_V [B]^T [D]\ [B]\ dV$$

Tenendo conto che sia $[B]$ che $[D]$ sono indipendenti da x si può calcolare $[K]$ molto semplicemente:

$$[K] = [B]^T [D]\ [B]\ AL$$

Elemento asta

Elemento $i\,j$ - 2 nodi x un grado di libertà per nodo: spostamento assiale u



Funzione di spostamento

$$u = a + bx$$

La matrice di rigidezza

$$[K]=[B]^T[D]\,[B]\,AL$$

$$[K]=EAL\,[B]^T[B]$$

$$[B]^T=\begin{Bmatrix}-\dfrac{1}{L}\\ \dfrac{1}{L}\end{Bmatrix}\qquad [B]=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{L} & \dfrac{1}{L}\end{bmatrix}$$

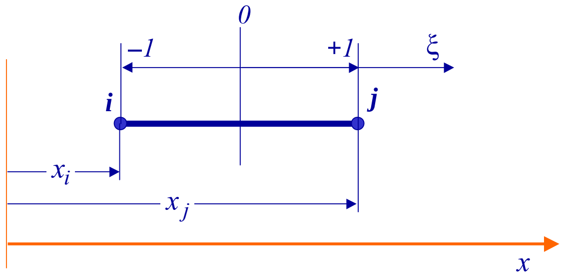
$$[K]=EAL\,[B]^T[B]=EAL\;\begin{array}{c|cc} & -\dfrac{1}{L} & \dfrac{1}{L}\\ \hline -\dfrac{1}{L} & \dfrac{1}{L^2} & -\dfrac{1}{L^2}\\ \dfrac{1}{L} & -\dfrac{1}{L^2} & \dfrac{1}{L^2}\end{array}=\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

La matrice di rigidezza nel sistema di riferimento dell'elemento

CDM - Elementi Finiti

Elemento asta

Formulazione isoparametrica



La relazione tra l'ascissa nel sistema di riferimento generale e l'ascissa espressa in un sistema di coordinate naturali dell'elemento:

$$x \leftrightarrow \xi$$

può essere ottenuta con funzioni identiche a quelle utilizzate per rappresentare gli spostamenti interni dell'elemento in funzione degli spostamenti nodali

$$x = a + b\xi$$

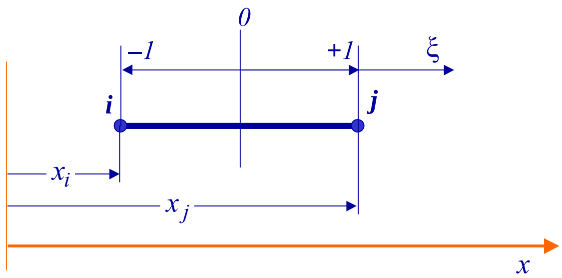
$$u = a + bx$$

Se la coordinata x è calcolata rispetto alle coordinate naturali con una funzione dello stesso grado, ovvero con lo stesso numero di parametri, della funzione di spostamento allora l'elemento viene detto isoparametrico.

L'elemento viene detto invece sub parametrico o super parametrico nei casi in cui il numero di parametri sia inferiore o superiore a quello della funzione di spostamento.

Elemento asta

Formulazione isoparametrica



La relazione tra l'ascissa nel sistema di riferimento generale e l'ascissa espressa in un sistema di coordinate naturali dell'elemento:

$$x \leftrightarrow \xi$$

può essere ottenuta con funzioni identiche a quelle utilizzate per rappresentare gli spostamenti interni dell'elemento in funzione degli spostamenti nodali

$$x = a + b\xi$$

$$u = a + bx$$

Per calcolare a e b si può procedre come segue:

Per $x = x_i$ deve essere $\xi = -1$ $\quad x_i = a + b(-1)$

Per $x = x_j$ deve essere $\xi = +1$ $\quad x_j = a + b(+1)$

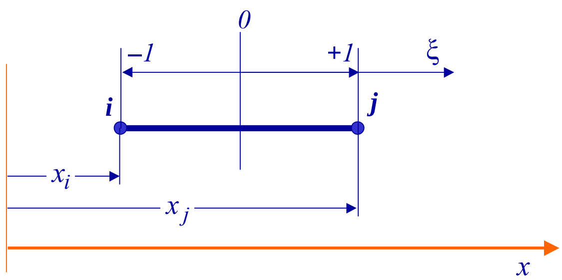
Dalla prima relazione si ha: $\quad x_i = a - b \qquad a = x_i + b$

Dalla seconda: $\quad x_j = a + b = x_i + b + b = x_i + 2b \quad$ e quindi: $\quad b = \dfrac{x_j - x_i}{2}$

da cui: $\quad a = x_i + b = x_i + \dfrac{x_j - x_i}{2} = \dfrac{2x_i + x_j - x_i}{2} \quad \rightarrow \quad a = \dfrac{x_j + x_i}{2}$

Elemento asta

Formulazione isoparametrica



$$x \leftrightarrow \xi$$

$$x = a + b\xi$$

$$u = a + bx$$

$$x = \frac{1-\xi}{2}x_i + \frac{1+\xi}{2}x_j$$

$$a = \frac{x_j + x_i}{2} \qquad b = \frac{x_j - x_i}{2}$$

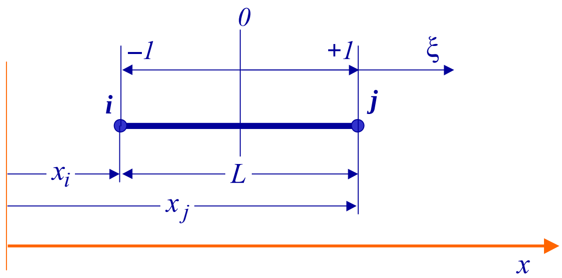
La funzione $\quad x = f(\xi) \quad$ può essere ottenuta come segue:

$$x = a + b\xi = \frac{x_j + x_i}{2} + \frac{x_j - x_i}{2}\xi = \frac{x_j}{2} + \frac{x_i}{2} + \frac{x_j}{2}\xi - \frac{x_i}{2}\xi$$

$$x = (1-\xi)\frac{x_i}{2} + (1+\xi)\frac{x_j}{2} = \frac{1-\xi}{2}x_i + \frac{1+\xi}{2}x_j$$

Elemento asta

Formulazione isoparametrica



$$x \leftrightarrow \xi$$

$$x = a + b\xi$$

$$u = a + bx$$

$$x = \frac{1-\xi}{2} x_i + \frac{1+\xi}{2} x_j$$

$$\xi = 1 + 2\frac{x - x_j}{L}$$

$$a = \frac{x_j + x_i}{2} \qquad b = \frac{x_j - x_i}{2} \qquad x_j - x_i = L$$

Si può ricavare anche la funzione inversa $\xi = f(x)$

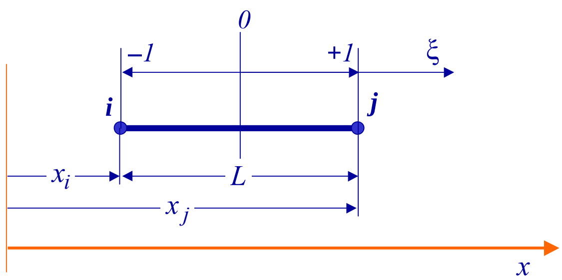
$$x = a + b\xi \rightarrow \xi = \frac{x-a}{b} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b} = \frac{2x}{x_j - x_i} - \frac{x_j + x_i}{x_j - x_i} = \frac{x - x_i}{x_j - x_i} - \frac{x + x_j}{x_j - x_i}$$

Può essere conveniente esprimerla anche in una forma un po' diversa:

$$\xi = \frac{2x - x_i - x_j + (x_j - x_j)}{x_j - x_i} = 1 + 2\frac{x - x_j}{x_j - x_i} = 1 + 2\frac{x - x_j}{L}$$

Elemento asta

Formulazione isoparametrica



$$x \leftrightarrow \xi$$

$$x = a + b\xi$$

$$u = a + bx$$

$$x = \frac{1-\xi}{2} x_i + \frac{1+\xi}{2} x_j$$

$$\xi = 1 + 2\frac{x - x_j}{L}$$

$$a = \frac{x_j + x_i}{2} \qquad b = \frac{x_j - x_i}{2} \qquad x_j - x_i = L$$

$x = f(\xi)$ può essere espressa tramite funzioni di forma

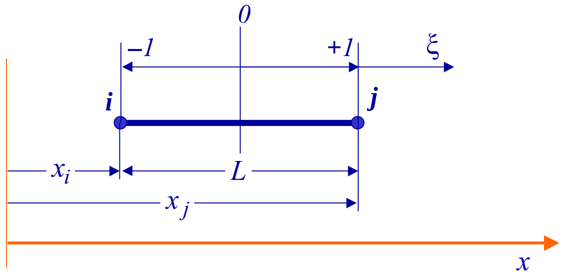
$$x = \frac{1-\xi}{2} x_i + \frac{1+\xi}{2} x_j$$

$\{c\}$ è il vettore delle coordinate nodali (nel sistema di riferimento generale)

$$x = [N]\{c\} = [N]\begin{Bmatrix} x_i \\ x_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & N_j \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_i \\ x_j \end{Bmatrix} \qquad N_i = \frac{1-\xi}{2} \qquad N_j = \frac{1+\xi}{2}$$

Elemento asta

Formulazione isoparametrica



$$x \leftrightarrow \xi$$

$$x = a + b\xi$$

$$u = a + bx$$

$$x = \frac{1-\xi}{2} x_i + \frac{1+\xi}{2} x_j$$

$$\xi = 1 + 2\frac{x - x_j}{L}$$

$$a = \frac{x_j + x_i}{2} \qquad b = \frac{x_j - x_i}{2} \qquad x_j - x_i = L$$

$x = [N]\{c\}$ Con le stesse funzioni di forma viene calcolato lo spostamento interno u dell'elemento

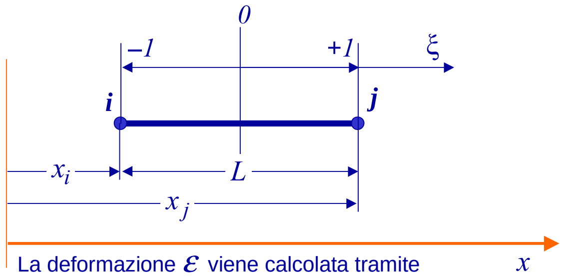
$$u = [N]\{d\} = [N]\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & N_j \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \frac{1-\xi}{2} u_i + \frac{1+\xi}{2} u_j$$

{d} è il vettore degli spostamenti nodali

CDM - Elementi Finiti

Elemento asta

Formulazione isoparametrica



$$x \leftrightarrow \xi$$

$$x = a + b\xi$$

$$u = a + bx$$

$$x = \frac{1-\xi}{2} x_i + \frac{1+\xi}{2} x_j$$

$$\xi = 1 + 2\frac{x - x_j}{L}$$

La deformazione ε viene calcolata tramite le derivate delle funzioni di forma:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = [B]\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \frac{d}{dx}[N]\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}$$

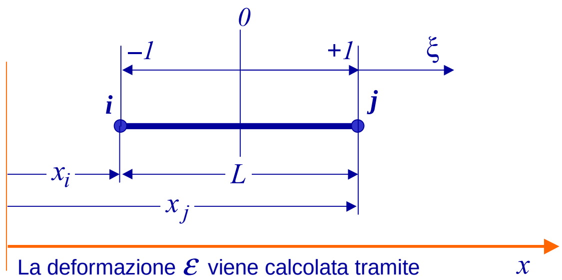
$\frac{dx}{d\xi}$ viene detto Jacobiano e si indica con J

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{d}{d\xi}[N]\{c\} = \frac{d}{d\xi}\begin{bmatrix} \frac{1-\xi}{2} & \frac{1+\xi}{2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_i \\ x_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_i \\ x_j \end{Bmatrix} = \frac{x_j - x_i}{2} = \frac{L}{2}$$

In questo caso lo Jacobiano vale: $\frac{dx}{d\xi} = \boxed{J = \frac{L}{2}}$ → $\frac{1}{J} = \frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{L}$

Elemento asta

Formulazione isoparametrica



$$x \leftrightarrow \xi$$

$$x = a + b\xi$$

$$u = a + bx$$

$$x = \frac{1-\xi}{2}x_i + \frac{1+\xi}{2}x_j$$

$$\xi = 1 + 2\frac{x - x_j}{L}$$

La deformazione ε viene calcolata tramite le derivate delle funzioni di forma:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = [B]\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \frac{d}{dx}[N]\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}$$

L'operazione di derivazione può quindi essere fatta come segue:

$$\frac{d}{dx} = \frac{d\xi}{dx}\frac{d}{d\xi} = \frac{1}{J}\frac{d}{d\xi} = \frac{1}{J}\frac{d}{d\xi} = \frac{2}{L}\frac{d}{d\xi}$$

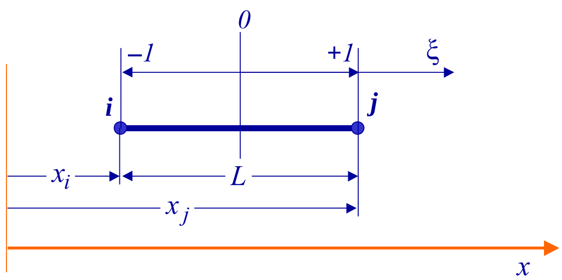
$$[B] = \frac{d}{dx}[N] = \frac{2}{L}\frac{d}{d\xi}[N] = \frac{2}{L}\frac{d}{d\xi}\begin{bmatrix} N_i & N_j \end{bmatrix} = \frac{2}{L}\frac{d}{d\xi}\begin{bmatrix} \frac{1-\xi}{2} & \frac{1+\xi}{2} \end{bmatrix} = \frac{2}{L}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

La matrice B vale dunque: $[B] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}$

CDM - Elementi Finiti

Elemento asta

Formulazione isoparametrica



$$x \leftrightarrow \xi$$

$$x = a + b\xi$$

$$u = a + bx$$

$$x = \frac{1-\xi}{2}x_i + \frac{1+\xi}{2}x_j$$

$$\xi = 1 + 2\frac{x - x_j}{L}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

La matrice di rigidezza dell'elemento isoparametrico può essere calcolata come di consueto:

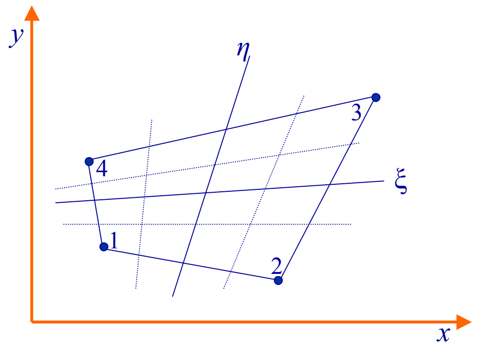
$$[K] = \int_V [B]^T [D]\,[B]\,dV$$

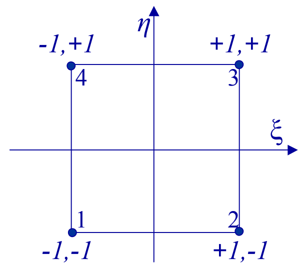
$$[K] = [B]^T [D]\,[B]\int_0^L dx = [B]^T [D]\,[B]\,A\int_{-1}^{+1} J d\xi = [B]^T [B]\,2AEJ$$

Ricordando che: $[B]^T[B] = \begin{bmatrix} \frac{1}{L^2} & -\frac{1}{L^2} \\ -\frac{1}{L^2} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix}$ e $J = \frac{L}{2}$ si ha: $[K] = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Elemento piano a 4 nodi

Formulazione isoparametrica





Coordinate naturali

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = [N]\{c\} \qquad \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [N]\{d\}$$

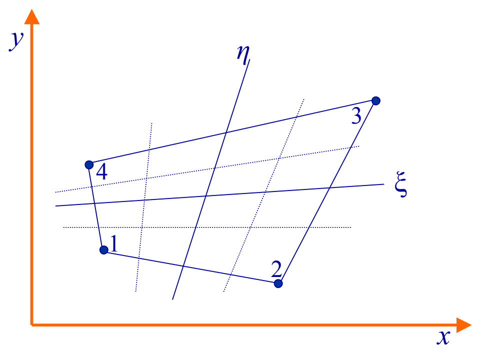
$$\{c\} = \{x_1 \quad y_1 \quad x_2 \quad y_2 \quad x_3 \quad y_3 \quad x_4 \quad y_4\}$$

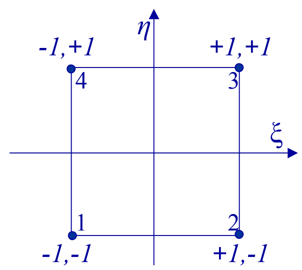
$$\{d\} = \{u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4\}$$

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}$$

Elemento piano a 4 nodi

Formulazione isoparametrica





Coordinate naturali

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)\,(1-\eta) \qquad N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)\,(1-\eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)\,(1+\eta) \qquad N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)\,(1+\eta)$$

In generale, data una funzione $\varphi(x, y)$ può essere definito lo jacobiano

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\xi} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\xi}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\eta} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\eta}$$

$$\begin{Bmatrix} \varphi_{,\xi} \\ \varphi_{,\eta} \end{Bmatrix} = J \begin{Bmatrix} \varphi_{,x} \\ \varphi_{,y} \end{Bmatrix} \qquad [J] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix}$$

può essere definito anche l'operatore inverso $\begin{Bmatrix} \varphi_{,x} \\ \varphi_{,y} \end{Bmatrix} = \Gamma \begin{Bmatrix} \varphi_{,\xi} \\ \varphi_{,\eta} \end{Bmatrix}$ $\qquad [\Gamma] = [J]^{-1}$

Nel caso dell'elemento isoparametrico piano a quattro nodi le funzioni da considerare sono :

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4$$

$$v = N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 + N_4 v_4$$

$$[J] \Rightarrow \begin{aligned} J_{11} &= x_{,\xi} = N_{1,\xi}\ x_1 + N_{2,\xi}\ x_2 + N_{3,\xi}\ x_3 + N_{4,\xi}\ x_4 \\ J_{12} &= y_{,\xi} = N_{1,\xi}\ y_1 + N_{2,\xi}\ y_2 + N_{3,\xi}\ y_3 + N_{4,\xi}\ y_4 \\ J_{21} &= x_{,\eta} = N_{1,\eta}\ x_1 + N_{2,\eta}\ x_2 + N_{3,\eta}\ x_3 + N_{4,\eta}\ x_4 \\ J_{22} &= y_{,\eta} = N_{1,\eta}\ y_1 + N_{2,\eta}\ y_2 + N_{3,\eta}\ y_3 + N_{4,\eta}\ y_4 \end{aligned}$$

$$N_{1,\xi} = -\frac{1-\eta}{4} \qquad N_{2,\xi} = \frac{1-\eta}{4} \qquad N_{3,\xi} = \frac{1+\eta}{4} \qquad N_{4,\xi} = -\frac{1+\eta}{4}$$

$$N_{1,\eta} = -\frac{1-\xi}{4} \qquad N_{2,\eta} = -\frac{1+\xi}{4} \qquad N_{3,\eta} = \frac{1+\xi}{4} \qquad N_{4,\eta} = \frac{1-\xi}{4}$$

A questo punto ci sono tutti gli elementi per il calcolo della matrice [B] :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_x \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u,_x \\ u,_y \\ v,_x \\ v,_y \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u,_x \\ u,_y \\ v,_x \\ v,_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & 0 & 0 \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ 0 & 0 & \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u,_\xi \\ u,_\eta \\ v,_\xi \\ v,_\eta \end{Bmatrix}$$

$$\{\varepsilon\} = [B]\{d\}$$

$$\begin{Bmatrix} u,_\xi \\ u,_\eta \\ v,_\xi \\ v,_\eta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & 0 & N_{2,\xi} & 0 & N_{3,\xi} & 0 & N_{4,\xi} & 0 \\ N_{1,\eta} & 0 & N_{2,\eta} & 0 & N_{3,\eta} & 0 & N_{4,\eta} & 0 \\ 0 & N_{1,\xi} & 0 & N_{2,\xi} & 0 & N_{3,\xi} & 0 & N_{4,\xi} \\ 0 & N_{1,\eta} & 0 & N_{2,\eta} & 0 & N_{3,\eta} & 0 & N_{4,\eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

La matrice [K] :

$$[K] = \int_V [B]^T [D]\,[B]\;dV \;=\; \iint [B]^T [D]\,[B]\;t\;dx\;dy$$

t = spessore dell'elemento

$$[K] = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [B]^T [D]\,[B]\;t\;\det(J)\;d\xi\;d\eta$$

dove $\det(J) = J_{11}J_{22} - J_{21}J_{12}$