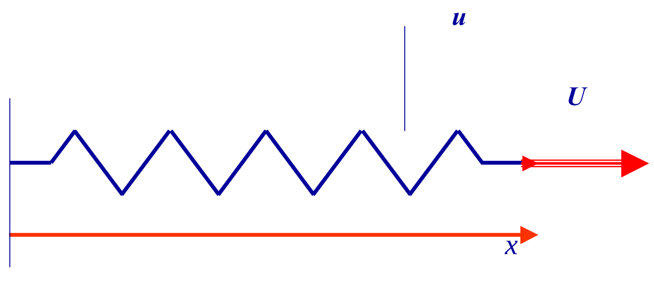
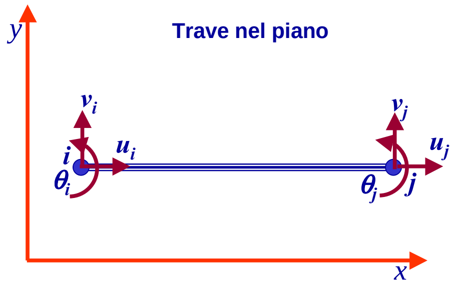
Analisi sistematica
delle strutture

Rigidezza



Elemento trave

Trave nel piano



Tre gradi di libertà per nodo

Due nodi per elemento

↓

Sei gradi di libertà per elemento

↓

Matrice di rigidezza di elemento: 6 x 6

Vettore forze nodali — Vettore spostamenti nodali

$$\begin{pmatrix} U_i \\ V_i \\ M_i \\ U_j \\ V_j \\ M_j \end{pmatrix} = \left[\mathbf{K} \right] \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{pmatrix}$$

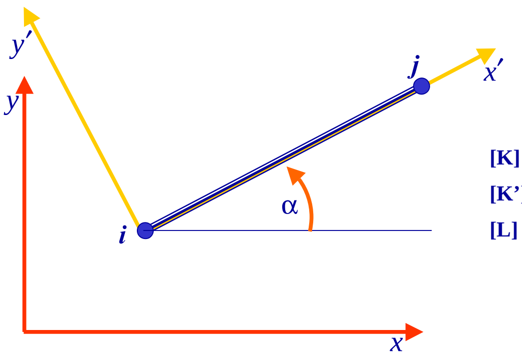
Analisi sistematica delle strutture

Elemento trave

Trave nel piano

La matrice di rigidezza **K** viene prima calcolata in un sistema di riferimento locale e poi ruotata nel sistema di riferimento globale.

$$[K] = [L]^T \; [K'] \; [L]$$



[K] = matrice di rigidezza nel sistema globale

[K'] = matrice di rigidezza nel sistema locale

[L] = matrice di rotazione

Analisi sistematica delle strutture

Elemento trave

Componenti assiali

A = area della sezione

L = lunghezza

E = Modulo di Young

Imponendo lo spostamento nodale u_i, mantenendo vincolati tutti gli altri gradi di libertà dell'elemento, si generano le forze nodali U_i ed U_j:

$$U_i = \frac{EA}{L} u_i \qquad U_j = -\frac{EA}{L} u_i$$

Analisi sistematica delle strutture

Elemento trave

Componenti assiali

A = area della sezione

L = lunghezza

E = Modulo di Young

Imponendo lo spostamento nodale u_i, mantenendo vincolati tutti gli altri gradi di libertà dell'elemento, si generano le forze nodali U_i ed U_j:

$$U_i = \frac{EA}{L} u_i \qquad U_j = -\frac{EA}{L} u_i$$

In modo analogo si possono legare U_i ed U_j ad u_j:

$$U_j = \frac{EA}{L} u_j \qquad U_i = -\frac{EA}{L} u_j$$

La relazione tra forze e spostamenti nodali dell'elemento può essere scritta in forma matriciale

$$\begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}$$

Elemento trave

Componenti assiali

A = area della sezione

L = lunghezza

E = Modulo di Young

La matrice di rigidezza dell'elemento trave, nel piano, ha dimensioni 6x6.

Conviene quindi espandere la matrice relativa alle sole componenti assiali, che è una 2x2, in una matrice 6x6.

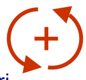
I coefficienti non definiti sono per il momento nulli.

$$\begin{pmatrix} U_i \\ V_i \\ M_i \\ U_j \\ V_j \\ M_j \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & & & -\frac{EA}{L} & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ -\frac{EA}{L} & & & \frac{EA}{L} & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{pmatrix}$$

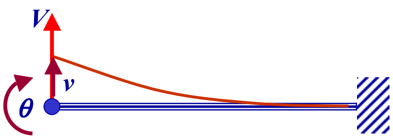
Elemento trave

Componenti flessionali

Convenzione per momenti e rotazioni: positivi se antiorari



Si consideri una trave incastrata ad un estremo e libera all'altro.



dove:
L = lunghezza
J = Momento d'inerzia della sezione
E = Modulo di Young

Applicando all'estremo libero una forza V, normale all'asse della trave, si otterrà uno spostamento v, dato dalla nota relazione:

$$v = \frac{VL^3}{3EJ}$$

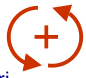
ed una rotazione θ, data dalla relazione:

$$\vartheta = -\frac{VL^2}{2EJ}$$

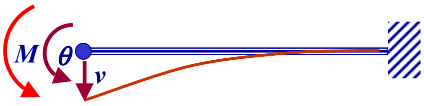
Elemento trave

Componenti flessionali

Convenzione per momenti e rotazioni: positivi se antiorari



Si consideri una trave incastrata ad un estremo e libera all'altro.



dove:
L = lunghezza
J = Momento d'inerzia della sezione
E = Modulo di Young

Applicando all'estremo libero una forza V, normale all'asse della trave, si otterrà uno spostamento v, dato dalla nota relazione:

$$v = \frac{VL^3}{3EJ}$$

ed una rotazione θ, data dalla relazione:

$$\vartheta = -\frac{VL^2}{2EJ}$$

Applicando invece un momento M ,
i valori dello spostamento v e della rotazione θ
sono calcolati dalle relazioni:

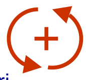
$$v = -\frac{ML^2}{2EJ}$$

$$\vartheta = \frac{ML}{EJ}$$

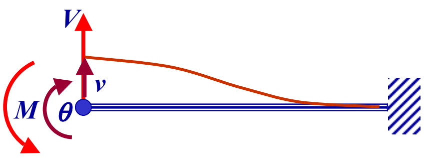
Elemento trave

Componenti flessionali

Convenzione per momenti e rotazioni: positivi se antiorari



Si consideri una trave incastrata ad un estremo e libera all'altro.



dove:
L = lunghezza
J = Momento d'inerzia della sezione
E = Modulo di Young

Applicando all'estremo libero sia la forza V che il momento M
si ottengono lo spostamento v e la rotazione θ

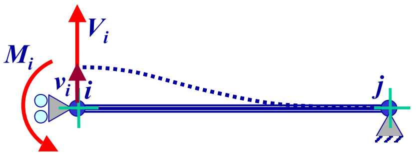
$$v = \frac{VL^3}{3EJ} - \frac{ML^2}{2EJ}$$

$$\vartheta = -\frac{VL^2}{2EJ} + \frac{ML}{EJ}$$

Elemento trave

Componenti flessionali

Si consideri l'elemento trave compreso tra i nodi $\boldsymbol{i}$ e $\boldsymbol{j}$



Si supponga di lasciare libero il solo grado di libertà v_i mentre tutti gli altri sono bloccati.

In particolare deve essere $\theta_i = 0$

Si imponga ora uno spostamento verticale nel nodo $\boldsymbol{i}$

Lo spostamento verticale v_i è legato alla forza V_i ed al momento M_i dalla relazione:

$$v_i = \frac{V_i L^3}{3EJ} - \frac{M_i L^2}{2EJ}$$

Per congruenza con i vincoli deve essere: $\vartheta_i = 0$

$$\vartheta_i = -\frac{V_i L^2}{2EJ} + \frac{M_i L}{EJ} = 0 \rightarrow \frac{V_i L^2}{2EJ} = \frac{M_i L}{EJ} \rightarrow \frac{V_i L}{2} = M_i$$

$$v_i = \frac{V_i L^3}{3EJ} - \frac{V_i L^3}{4EJ}$$

$$v_i = \frac{V_i L^3}{12EJ}$$

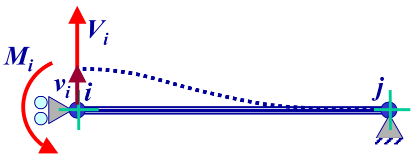
Per calcolare il coefficiente di rigidezza è necessario esprimere la forza V_i in funzione dello spostamento v_i

$$\boxed{V_i = \frac{12EJ}{L^3} v_i}$$

Elemento trave

Componenti flessionali

Si consideri l'elemento trave compreso tra i nodi $\boldsymbol{i}$ e $\boldsymbol{j}$



Si supponga di lasciare libero il solo grado di libertà v_i mentre tutti gli altri sono bloccati.

In particolare deve essere $\theta_i = 0$

Si imponga ora uno spostamento verticale nel nodo $\boldsymbol{i}$

Lo spostamento verticale v_i è legato alla forza V_i ed al momento M_i dalla relazione:

$$v_i = \frac{V_i L^3}{3EJ} - \frac{M_i L^2}{2EJ}$$

Per congruenza con i vincoli deve essere: $\vartheta_i = 0$

$$\vartheta_i = -\frac{V_i L^2}{2EJ} + \frac{M_i L}{EJ} = 0 \rightarrow \frac{V_i L^2}{2EJ} = \frac{M_i L}{EJ} \rightarrow V_i = \frac{2M_i}{L}$$

$$v_i = \frac{2M_i L^2}{3EJ} - \frac{M_i L^2}{4EJ}$$

$$v_i = \frac{M_i L^2}{6EJ}$$

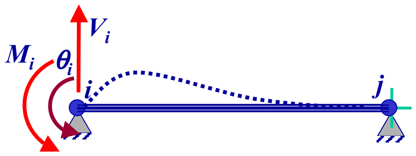
Per calcolare il coefficiente che lega M_i a v_i basta esprimere diversamente la relazione che lega v_i a V_i ed M_i :

$$\boxed{M_i = \frac{6EJ}{L^2} v_i}$$

Elemento trave

Componenti flessionali

Si consideri l'elemento trave compreso tra i nodi $\boldsymbol{i}$ e $\boldsymbol{j}$



Si supponga ora di lasciare libero il solo grado di libertà $\boldsymbol{\theta_i}$.

In particolare deve essere $\boldsymbol{v_i}$ =0

Si imponga ora una rotazione nel nodo $\boldsymbol{i}$

La rotazione $\boldsymbol{\theta_i}$ è legata alla forza V_i ed al momento M_i dalla relazione:

$$\vartheta_i = -\frac{V_i L^2}{2EJ} + \frac{M_i L}{EJ}$$

Per congruenza con i vincoli deve essere: $v_i = 0$

$$v_i = \frac{V_i L^3}{3EJ} - \frac{M_i L^2}{2EJ} = 0 \rightarrow \frac{V_i L^3}{3EJ} = \frac{M_i L^2}{2EJ} \rightarrow V_i = \frac{3}{2L} M_i$$

$$\vartheta_i = -\frac{3M_i L}{4EJ} + \frac{M_i L}{EJ}$$

$$\vartheta_i = \frac{L}{4EJ} M_i$$

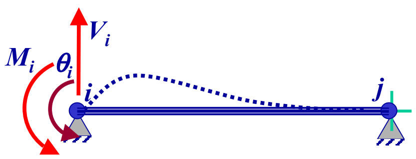
Anche in questo caso è necessario esprimere il momento M_i in funzione della rotazione $\boldsymbol{\theta}_i$

$$\boxed{M_i = \frac{4EJ}{L}\vartheta_i}$$

Elemento trave

Componenti flessionali

Si consideri l'elemento trave compreso tra i nodi $\boldsymbol{i}$ e $\boldsymbol{j}$



Si supponga ora di lasciare libero il solo grado di libertà $\boldsymbol{\theta_i}$.

In particolare deve essere $\boldsymbol{v_i}$ =0

Si imponga ora una rotazione nel nodo $\boldsymbol{i}$

A questo punto il coefficiente che lega V_i a $\boldsymbol{\theta_i}$ può essere facilmente calcolato:

La rotazione $\boldsymbol{\theta_i}$ è legata alla forza V_i ed al momento M_i dalla relazione:

$$\vartheta_i = -\frac{V_i L^2}{2EJ} + \frac{M_i L}{EJ} \rightarrow \vartheta_i = -\frac{V_i L^2}{2EJ} + \frac{2L^2 V_i}{3EJ}$$

Per congruenza con i vincoli deve essere: $v_i = 0$

$$v_i = \frac{V_i L^3}{3EJ} - \frac{M_i L^2}{2EJ} = 0 \rightarrow \frac{V_i L^3}{3EJ} = \frac{M_i L^2}{2EJ} \rightarrow V_i = \frac{3}{2L} M_i \rightarrow \frac{2LV_i}{3} = M_i$$

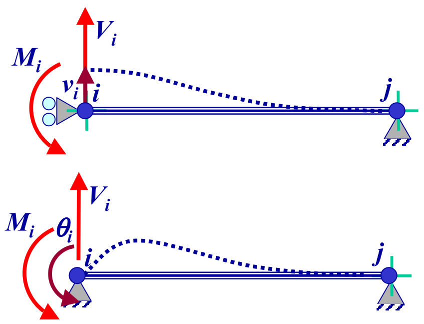
$$\vartheta_i = \frac{L^2 V_i}{6EJ}$$

$$\boxed{V_i = \frac{6EJ}{L^2}\vartheta_i}$$

Analisi sistematica delle strutture

Elemento trave

Componenti flessionali



I coefficienti calcolati per il nodo $\boldsymbol{i}$, relativi ai gradi di libertà $\boldsymbol{v_i}$ e $\boldsymbol{\theta_i}$, possono essere espressi in forma matriciale:

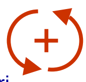
$$\begin{Bmatrix} V_i \\ M_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{12EJ}{L^3} & \dfrac{6EJ}{L^2} \\ \dfrac{6EJ}{L^2} & \dfrac{4EJ}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \end{Bmatrix}$$

Analisi sistematica delle strutture

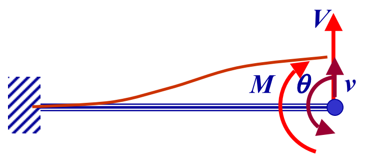
Elemento trave

Componenti flessionali

Convenzione per momenti e rotazioni: positivi se antiorari



Per il nodo $\boldsymbol{j}$ si procede in modo analogo, a meno del diverso segno dei momenti e delle rotazioni:



In questo caso, applicando all'estremo libero sia la forza V che il momento M si ottengono le seguenti relazioni per lo spostamento $\boldsymbol{v}$ e la rotazione $\boldsymbol{\theta}$:

$$v = \frac{VL^3}{3EJ} + \frac{ML^2}{2EJ}$$

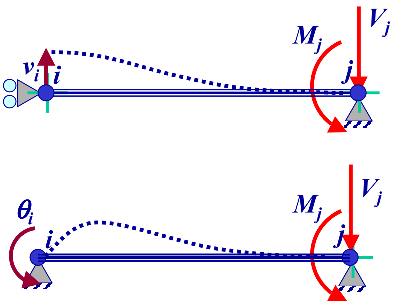
$$\vartheta = \frac{VL^2}{2EJ} + \frac{ML}{EJ}$$

Operando come nel caso precedente si giunge alla seguente relazione matriciale:

$$\begin{Bmatrix} V_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{12EJ}{L^3} & -\dfrac{6EJ}{L^2} \\ -\dfrac{6EJ}{L^2} & \dfrac{4EJ}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}$$

Elemento trave

Componenti flessionali



La forza ed il momento relativi al nodo ***j*** e dipendenti dallo spostamento e dalla rotazione del nodo ***i*** possono essere calcolati utilizzando le equazioni di equilibrio:

$$\sum V = V_i + V_j = 0 \quad \rightarrow \quad V_j = -V_i$$

da cui si ricava immediatamente che:

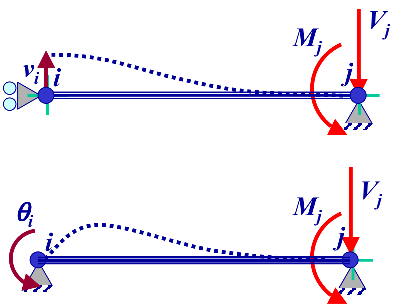
$$V_j = -\frac{12EJ}{L^3} v_i - \frac{6EJ}{L^2} \vartheta_i$$

Dall'equilibrio dei momenti si ottiene: $\sum M = -V_i L + M_i + M_j = 0 \rightarrow M_j = V_i L - M_i$

$$M_j = \frac{12EJ}{L^3} L v_i + \frac{6EJ}{L^2} L \vartheta_i - \frac{6EJ}{L^2} v_i - \frac{4EJ}{L} \vartheta_i = \frac{6EJ}{L^2} v_i + \frac{2EJ}{L} \vartheta_i$$

Elemento trave

Componenti flessionali



Quindi i coefficienti calcolati per il nodo ***j***, relativi ai gradi di libertà v_i e θ_i , possono essere espressi in forma matriciale:

$$\begin{Bmatrix} V_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{12EJ}{L^3} & -\frac{6EJ}{L^2} \\ \frac{6EJ}{L^2} & \frac{2EJ}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \end{Bmatrix}$$

In modo del tutto simile si calcolano gli ultimi quattro coefficienti della matrice di rigidezza:

$$\begin{Bmatrix} V_i \\ M_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{12EJ}{L^3} & \frac{6EJ}{L^2} \\ -\frac{6EJ}{L^2} & \frac{2EJ}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}$$

Elemento trave

Componenti flessionali

I coefficienti di rigidezza flessionali possono quindi essere rappresentati in una matrice 4 x 4 come segue

$$
\begin{pmatrix} V_i \\ M_i \\ V_j \\ M_j \end{pmatrix} =
\begin{bmatrix}
\frac{12EJ}{L^3} & \frac{6EJ}{L^2} & -\frac{12EJ}{L^3} & \frac{6EJ}{L^2} \\
\frac{6EJ}{L^2} & \frac{4EJ}{L} & -\frac{6EJ}{L^2} & \frac{2EJ}{L} \\
-\frac{12EJ}{L^3} & -\frac{6EJ}{L^2} & \frac{12EJ}{L^3} & -\frac{6EJ}{L^2} \\
\frac{6EJ}{L^2} & \frac{2EJ}{L} & -\frac{6EJ}{L^2} & \frac{4EJ}{L}
\end{bmatrix}
\begin{pmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{pmatrix}
$$

Elemento trave

L = lunghezza
A = area della sezione
J = Momento d’inerzia della sezione
E = Modulo di Young

Ora sono noti tutti i coefficienti di rigidezza dell’elemento e può essere scritta l’intera matrice di rigidezza dell’elemento

$$
\begin{pmatrix} U_i \\ V_i \\ M_i \\ U_j \\ V_j \\ M_j \end{pmatrix} =
\begin{bmatrix}
\frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\
0 & \frac{12EJ}{L^3} & \frac{6EJ}{L^2} & 0 & -\frac{12EJ}{L^3} & \frac{6EJ}{L^2} \\
0 & \frac{6EJ}{L^2} & \frac{4EJ}{L} & 0 & -\frac{6EJ}{L^2} & \frac{2EJ}{L} \\
-\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\
0 & -\frac{12EJ}{L^3} & -\frac{6EJ}{L^2} & 0 & \frac{12EJ}{L^3} & -\frac{6EJ}{L^2} \\
0 & \frac{6EJ}{L^2} & \frac{2EJ}{L} & 0 & -\frac{6EJ}{L^2} & \frac{4EJ}{L}
\end{bmatrix}
\begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{pmatrix}
$$

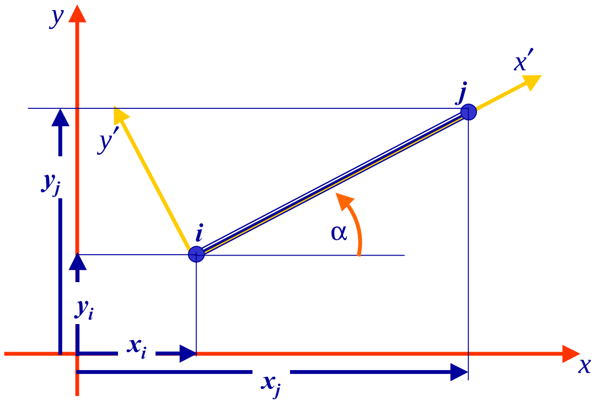
Elemento trave

La matrice di rigidezza ottenuta è scritta nel sistema di riferimento locale.

Per calcolare la matrice nel sistema globale è necessario eseguire il prodotto matriciale:

$$[K]=[L]^T\ [K']\ [L]$$

Dove $[L]$ è la matrice di rotazione, che può essere scritta in funzione dell'angolo α che dipende dalle coordinate nodali dell'elemento, scritte nel sistema globale.



$$\alpha = arc\tan\frac{y_j - y_i}{x_j - x_i}$$

Elemento trave

La matrice di rotazione $[L]$ scritta nel piano, per due gradi di libertà di traslazione ed uno di rotazione, ha la forma:

$$[L]=\begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

La trasposta si ricava molto semplicemente scambiando le righe con le colonne:

$$[L]^T=\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

Elemento trave

Il primo prodotto matriciale:

$$[K'] \, [L]$$

Abbreviazioni: $c = \cos\alpha$
$s = \mathrm{sen}\,\alpha$

$\cos\alpha$	$\mathrm{sen}\,\alpha$	0	0	0	0
$-\mathrm{sen}\,\alpha$	$\cos\alpha$	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	$\cos\alpha$	$\mathrm{sen}\,\alpha$	0
0	0	0	$-\mathrm{sen}\,\alpha$	$\cos\alpha$	0
0	0	0	0		1

$\frac{EA}{L}$	0	0	$-\frac{EA}{L}$	0	0
0	$\frac{12EJ}{L^3}$	$\frac{6EJ}{L^2}$	0	$-\frac{12EJ}{L^3}$	$\frac{6EJ}{L^2}$
0	$\frac{6EJ}{L^2}$	$\frac{4EJ}{L}$	0	$-\frac{6EJ}{L^2}$	$\frac{2EJ}{L}$
$-\frac{EA}{L}$	0	0	$\frac{EA}{L}$	0	0
0	$-\frac{12EJ}{L^3}$	$-\frac{6EJ}{L^2}$	0	$\frac{12EJ}{L^3}$	$-\frac{6EJ}{L^2}$
0	$\frac{6EJ}{L^2}$	$\frac{2EJ}{L}$	0	$-\frac{6EJ}{L^2}$	$\frac{4EJ}{L}$

$\frac{EAc}{L}$	$\frac{EAs}{L}$	0	$-\frac{EAc}{L}$	$-\frac{EAs}{L}$	0
$-\frac{12EJs}{L^3}$	$\frac{12EJc}{L^3}$	$\frac{6EJ}{L^2}$	$\frac{12EJs}{L^3}$	$-\frac{12EJc}{L^3}$	$\frac{6EJ}{L^2}$
$-\frac{6EJs}{L^2}$	$\frac{6EJc}{L^2}$	$\frac{4EJ}{L}$	$\frac{6EJs}{L^2}$	$-\frac{6EJc}{L^2}$	$\frac{2EJ}{L}$
$-\frac{EAc}{L}$	$\frac{EAs}{L}$	0	$\frac{EAc}{L}$	$\frac{EAs}{L}$	0
$\frac{12EJs}{L^3}$	$-\frac{12EJc}{L^3}$	$-\frac{6EJ}{L^2}$	$-\frac{12EJs}{L^3}$	$\frac{12EJc}{L^3}$	$-\frac{6EJ}{L^2}$
$-\frac{6EJs}{L^2}$	$\frac{6EJc}{L^2}$	$\frac{2EJ}{L}$	$\frac{6EJs}{L^2}$	$-\frac{6EJc}{L^2}$	$\frac{4EJ}{L}$

Elemento trave

Il secondo prodotto matriciale:

$$[L]^T \left[[K'] \, [L]\right]$$

Abbreviazioni: $c = \cos\alpha$
$s = \mathrm{sen}\,\alpha$

$\frac{EAc}{L}$	$\frac{EAs}{L}$	0	$-\frac{EAc}{L}$	$-\frac{EAs}{L}$	0
$-\frac{12EJs}{L^3}$	$\frac{12EJc}{L^3}$	$\frac{6EJ}{L^2}$	$\frac{12EJs}{L^3}$	$-\frac{12EJc}{L^3}$	$\frac{6EJ}{L^2}$
$-\frac{6EJs}{L^2}$	$\frac{6EJc}{L^2}$	$\frac{4EJ}{L}$	$\frac{6EJs}{L^2}$	$-\frac{6EJc}{L^2}$	$\frac{2EJ}{L}$
$-\frac{EAc}{L}$	$\frac{EAs}{L}$	0	$\frac{EAc}{L}$	$\frac{EAs}{L}$	0
$\frac{12EJs}{L^3}$	$-\frac{12EJc}{L^3}$	$-\frac{6EJ}{L^2}$	$-\frac{12EJs}{L^3}$	$\frac{12EJc}{L^3}$	$-\frac{6EJ}{L^2}$
$-\frac{6EJs}{L^2}$	$\frac{6EJc}{L^2}$	$\frac{2EJ}{L}$	$\frac{6EJs}{L^2}$	$-\frac{6EJc}{L^2}$	$\frac{4EJ}{L}$

$\cos\alpha$	$-\mathrm{sen}\alpha$	0	0	0	0
$\mathrm{sen}\alpha$	$\cos\alpha$	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	$\cos\alpha$	$-\mathrm{sen}\alpha$	0
0	0	0	$\mathrm{sen}\alpha$	$\cos\alpha$	0
0	0	0	0		1

$= \frac{E}{L}$

$Ac^2 + \frac{12J}{L^2}s^2$	$\left(A - \frac{12J}{L^2}\right)sc$	$-\frac{6J}{L}s$	$-Ac^2 - \frac{12J}{L^2}s^2$	$\left(-A + \frac{12J}{L^2}\right)sc$	$-\frac{6J}{L}s$
$\left(A - \frac{12J}{L^2}\right)sc$	$As^2 + \frac{12J}{L^2}c^2$	$\frac{6J}{L}c$	$\left(-A + \frac{12J}{L^2}\right)sc$	$-As^2 - \frac{12J}{L^2}c^2$	$\frac{6J}{L}c$
$-\frac{6J}{L}s$	$\frac{6J}{L}c$	$4J$	$\frac{6J}{L}s$	$-\frac{6J}{L}c$	$2J$
$-Ac^2 - \frac{12J}{L^2}s^2$	$\left(-A + \frac{12J}{L^2}\right)sc$	$\frac{6J}{L}s$	$Ac^2 + \frac{12J}{L^2}s^2$	$\left(A - \frac{12J}{L^2}\right)sc$	$\frac{6J}{L}s$
$\left(-A + \frac{12J}{L^2}\right)sc$	$-As^2 - \frac{12J}{L^2}c^2$	$-\frac{6J}{L}c$	$\left(A - \frac{12J}{L^2}\right)sc$	$As^2 + \frac{12J}{L^2}c^2$	$-\frac{6J}{L}c$
$-\frac{6J}{L}s$	$\frac{6J}{L}c$	$2J$	$\frac{6J}{L}s$	$-\frac{6J}{L}c$	$4J$

Elemento trave

Questa è dunque la matrice di rigidezza 6 x 6 di un elemento trave nel piano.

Per calcolarla è necessario conoscere la caratteristica elastica del materiale e i dati geometrici dell'elemento:

L = lunghezza
A = area della sezione
J = Momento d'inerzia della sezione
E = Modulo di Young

$$\alpha = arc\tan\frac{y_j - y_i}{x_j - x_i}$$

$$
\frac{E}{L}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccc}
Ac^2+\frac{12J}{L^2}s^2 & \left(A-\frac{12J}{L^2}\right)sc & -\frac{6J}{L}s & -Ac^2-\frac{12J}{L^2}s^2 & \left(-A+\frac{12J}{L^2}\right)sc & -\frac{6J}{L}s \\
\left(A-\frac{12J}{L^2}\right)sc & As^2+\frac{12J}{L^2}c^2 & \frac{6J}{L}c & \left(-A+\frac{12J}{L^2}\right)sc & -As^2-\frac{12J}{L^2}c^2 & \frac{6J}{L}c \\
-\frac{6J}{L}s & \frac{6J}{L}c & 4J & \frac{6J}{L}s & -\frac{6J}{L}c & 2J \\
-Ac^2-\frac{12J}{L^2}s^2 & \left(-A+\frac{12J}{L^2}\right)sc & \frac{6J}{L}s & Ac^2+\frac{12J}{L^2}s^2 & \left(A-\frac{12J}{L^2}\right)sc & \frac{6J}{L}s \\
\left(-A+\frac{12J}{L^2}\right)sc & -As^2-\frac{12J}{L^2}c^2 & -\frac{6J}{L}c & \left(A-\frac{12J}{L^2}\right)sc & As^2+\frac{12J}{L^2}c^2 & -\frac{6J}{L}c \\
-\frac{6J}{L}s & \frac{6J}{L}c & 2J & \frac{6J}{L}s & -\frac{6J}{L}c & 4J
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
$$

Elemento trave

Per il calcolo è utile compilare una tabella dei coefficienti:

$$K_{11} = \frac{EA}{L}c^2 + \frac{12EJ}{L^3}s^2$$

$$K_{22} = \frac{EA}{L}s^2 + \frac{12EJ}{L^3}c^2$$

$$K_{33} = \frac{4EJ}{L}$$

$$K_{44} = \frac{EA}{L}c^2 + \frac{12EJ}{L^3}s^2$$

$$K_{55} = \frac{EA}{L}s^2 + \frac{12EJ}{L^3}c^2$$

$$K_{66} = \frac{4EJ}{L}$$

$$K_{12} = \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EJ}{L^3}\right)sc$$

$$K_{13} = -\frac{6EJ}{L^2}s$$

$$K_{14} = -\frac{EA}{L}c^2 - \frac{12EJ}{L^3}s^2$$

$$K_{15} = \left(-\frac{EA}{L} + \frac{12EJ}{L^3}\right)sc$$

$$K_{16} = -\frac{6EJ}{L^2}s$$

$$K_{23} = \frac{6EJ}{L^2}c$$

$$K_{24} = \left(-\frac{EA}{L} + \frac{12EJ}{L^3}\right)sc$$

$$K_{25} = -\frac{EA}{L}s^2 - \frac{12EJ}{L^3}c^2$$

$$K_{26} = \frac{6EJ}{L^2}c$$

$$K_{34} = \frac{6EJ}{L^2}s$$

$$K_{35} = -\frac{6EJ}{L^2}c$$

$$K_{36} = \frac{2EJ}{L}$$

$$K_{45} = \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EJ}{L^3}\right)sc$$

$$K_{46} = \frac{6EJ}{L^2}s$$

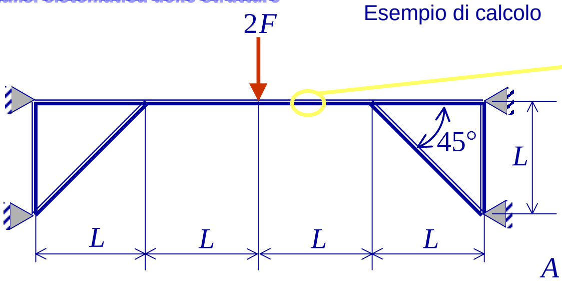
$$K_{56} = -\frac{6EJ}{L^2}c$$

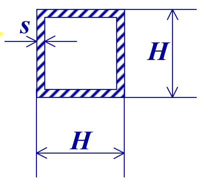
Gli altri coefficienti sono definiti dalla simmetria della matrice:

$$K_{ij} = K_{ji}$$

Analisi sistematica delle strutture

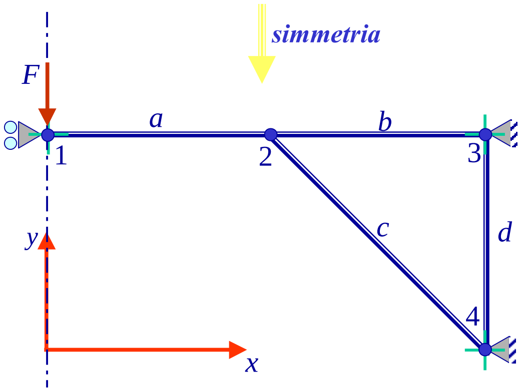
Esempio di calcolo





$$A = H^2 - (H-2s)^2 = 4(Hs - s^2)$$

$$J = \frac{H^4}{12} - \frac{(H-2s)^4}{12}$$



Connessioni degli elementi

El	i	j
a	1	2
b	2	3
c	2	4
d	3	4

Coordinate nodali

N	x	y
1	0	L
2	L	L
3	2L	L
4	2L	0

Analisi sistematica delle strutture

Dalle connessioni degli elementi, dalle coordinate nodali e dalle caratteristiche elastiche e geometriche di ogni elemento si ricavano le quattro matrici di rigidezza 6 x 6

El	i	j
a	1	2
b	2	3
c	2	4
d	3	4

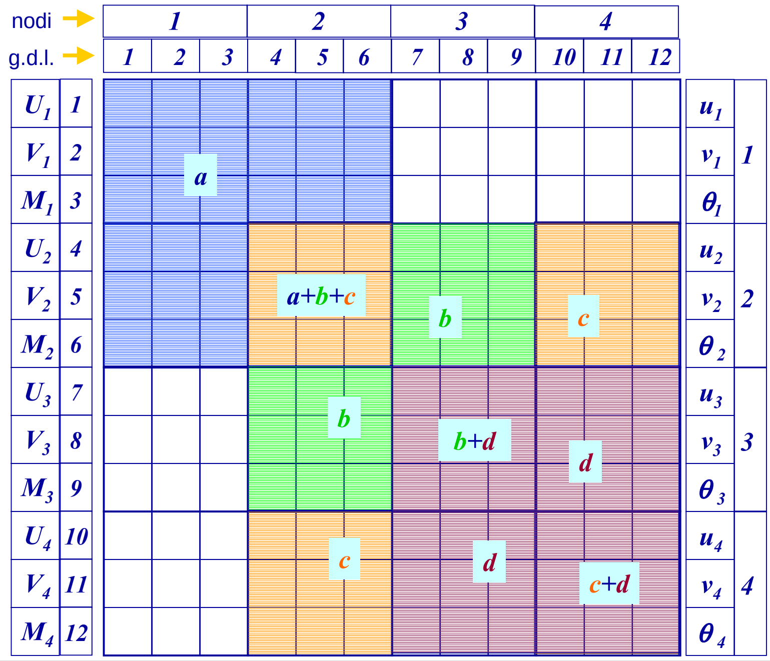
N	x	y
1	0	L
2	L	L
3	2L	L
4	2L	0

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} & b_{26} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} & b_{36} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} & b_{46} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} & b_{56} \\ b_{61} & b_{62} & b_{63} & b_{64} & b_{65} & b_{66} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} & d_{45} & d_{46} \\ d_{51} & d_{52} & d_{53} & d_{54} & d_{55} & d_{56} \\ d_{61} & b_{62} & d_{63} & d_{64} & d_{65} & d_{66} \end{matrix}$$

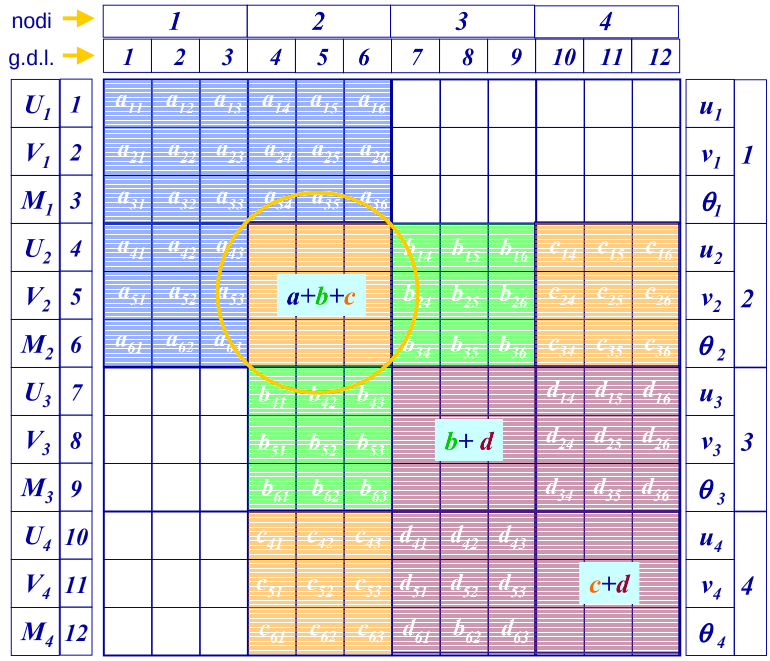
Le matrici degli elementi devono essere assemblate nella matrice di rigidezza della struttura, che avendo 4 nodi per 3 g.d.l. per nodo ha dimensioni 12 x 12

El	i	j
a	1	2
b	2	3
c	2	4
d	3	4



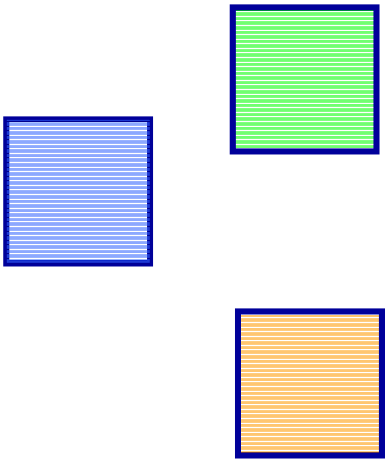
Le matrici degli elementi devono essere assemblate nella matrice di rigidezza della struttura, che avendo 4 nodi per 3 g.d.l. per nodo ha dimensioni 12 x 12

El	i	j
a	1	2
b	2	3
c	2	4
d	3	4



Le matrici degli elementi devono essere assemblate nella matrice di rigidezza della struttura, che avendo 4 nodi per 3 g.d.l. per nodo ha dimensioni 12 x 12

El	*i*	*j*
a	*1*	*2*
b	*2*	*3*
c	*2*	*4*
d	*3*	*4*



Analisi sistematica delle strutture

Le matrici degli elementi devono essere assemblate nella matrice di rigidezza della struttura, che avendo 4 nodi per 3 g.d.l. per nodo ha dimensioni 12 x 12

El	*i*	*j*
a	*1*	*2*
b	*2*	*3*
c	*2*	*4*
d	*3*	*4*

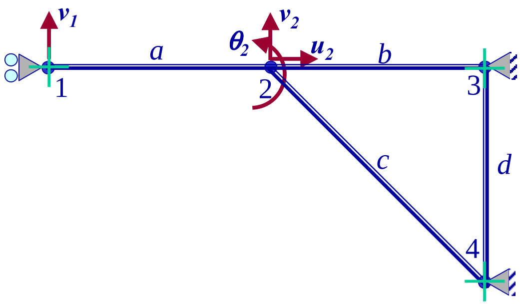
a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{36}
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	a_{46}
a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}	a_{56}
a_{61}	a_{62}	a_{63}	a_{64}	a_{65}	a_{66}

b_{11}	b_{12}	b_{13}	b_{14}	b_{15}	b_{16}
b_{21}	b_{22}	b_{23}	b_{24}	b_{25}	b_{26}
b_{31}	b_{32}	b_{33}	b_{34}	b_{35}	b_{36}
b_{41}	b_{42}	b_{43}	b_{44}	b_{45}	b_{46}
b_{51}	b_{52}	b_{53}	b_{54}	b_{55}	b_{56}
b_{61}	b_{62}	b_{63}	b_{64}	b_{65}	b_{66}

$a_{44}+b_{11}+c_{11}$	$a_{45}+b_{12}+c_{12}$	$a_{46}+b_{13}+c_{13}$
$a_{54}+b_{21}+c_{21}$	$a_{55}+b_{22}+c_{22}$	$a_{56}+b_{23}+c_{23}$
$a_{64}+b_{31}+c_{31}$	$a_{65}+b_{32}+c_{32}$	$a_{66}+b_{33}+c_{33}$

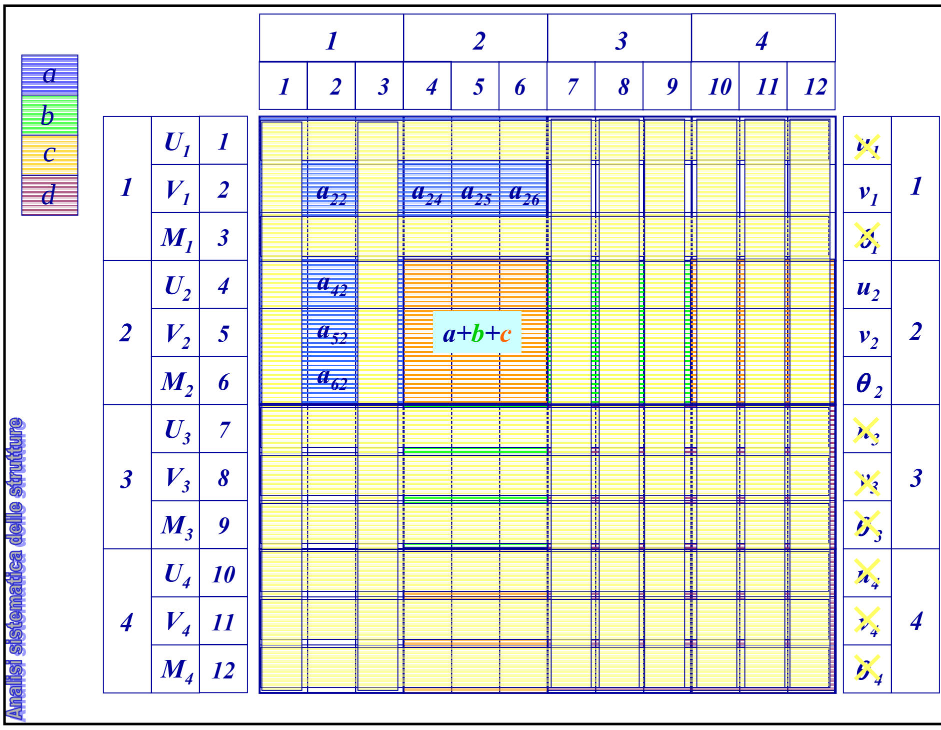
c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	c_{16}
c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	c_{25}	c_{26}
c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	c_{35}	c_{36}
c_{41}	c_{42}	c_{43}	c_{44}	c_{45}	c_{46}
c_{51}	c_{52}	c_{53}	c_{54}	c_{55}	c_{56}
c_{61}	c_{62}	c_{63}	c_{64}	c_{65}	c_{66}

Analisi sistematica delle strutture



Gradi di libertà **non** vincolati: v_1 u_2 v_2 θ_2

Gradi di libertà vincolati: $u_1\ \theta_1$ $u_3\ v_3\ \theta_3$ $u_4\ v_4\ \theta_4$



Il sistema risolutivo è costituito da 4 equazioni con 4 incognite

$$V_1 = a_{22}v_1 + a_{24}u_2 + a_{25}v_2 + a_{26}\vartheta_2$$

$$U_2 = a_{42}v_1 + (a_{44} + b_{11} + c_{11})u_2 + (a_{45} + b_{12} + c_{12})v_2 + (a_{46} + b_{13} + c_{13})\vartheta_2$$

$$V_2 = a_{52}v_1 + (a_{54} + b_{21} + c_{21})u_2 + (a_{55} + b_{22} + c_{22})v_2 + (a_{56} + b_{23} + c_{23})\vartheta_2$$

$$M_2 = a_{62}v_1 + (a_{64} + b_{31} + c_{31})u_2 + (a_{65} + b_{32} + c_{32})v_2 + (a_{66} + b_{33} + c_{33})\vartheta_2$$

Il sistema risolutivo è costituito da 4 equazioni con 4 incognite

$$F = a_{22}v_1 + a_{24}u_2 + a_{25}v_2 + a_{26}\vartheta_2$$

$$0 = a_{42}v_1 + (a_{44} + b_{11} + c_{11})u_2 + (a_{45} + b_{12} + c_{12})v_2 + (a_{46} + b_{13} + c_{13})\vartheta_2$$

$$0 = a_{52}v_1 + (a_{54} + b_{21} + c_{21})u_2 + (a_{55} + b_{22} + c_{22})v_2 + (a_{56} + b_{23} + c_{23})\vartheta_2$$

$$0 = a_{62}v_1 + (a_{64} + b_{31} + c_{31})u_2 + (a_{65} + b_{32} + c_{32})v_2 + (a_{66} + b_{33} + c_{33})\vartheta_2$$

Analisi sistematica delle strutture