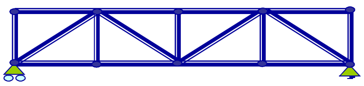
Il Metodo degli Elementi Finiti

Dalle dispense del prof. Dario Amodio e dalle lezioni del prof. Giovanni Santucci

Il Metodo degli Elementi Finiti

Introduzione

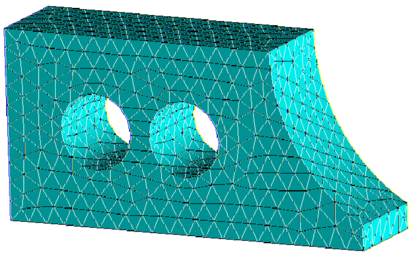
In alcune strutture la divisione in porzioni elementari, facilmente schematizzabili, discende immediatamente dal disegno e dalla tecnologia utilizzata per la costruzione.



Le caratteristiche di rigidezza dei vari elementi sono facilmente ricavabili dai modelli strutturali degli elementi (barre assiali, travi)

Molto spesso, invece, particolarmente nei componenti meccanici, la struttura è un continuo tridimensionale, che non presenta una preferenziale suddivisione in elementi.

In questi casi si può immaginare comunque di dividere la struttura in un numero finito di elementi, ognuno dei quali sarà caratterizzato da un certo numero di punti nodali nei quali definire le grandezze cinematiche e dinamiche. La rigidezza della struttura dipende dalle caratteristiche elastiche del materiale e dalla cinematica dei singoli elementi.



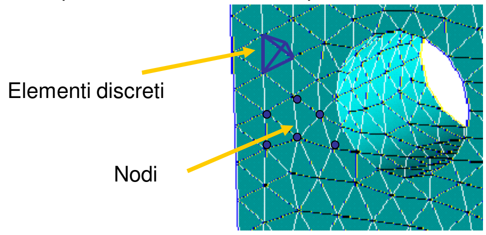
Il Metodo degli Elementi Finiti

Introduzione

Il metodo degli elementi finiti è lo studio dei criteri con cui rappresentare il continuo mediante un insieme di elementi discreti localmente equivalenti, dal punto di vista statico, alle corrispondenti porzioni del continuo..

L'idea è di ricondursi al caso già visto del calcolo strutturale matriciale, mediante le seguenti ipotesi di lavoro:

- Si rappresenta il continuo tramite un numero discreto di elementi finiti, connessi tra loro in un numero discreto di punti nodali lungo il contorno. (approssimazione: la connessione tra porzioni di continuo è nella realtà su infiniti punti e non in pochi punti discreti). Gli spostamenti nodali saranno ancora le incognite del problema, e tutte le grandezze di interesse verranno espresse in funzione di tali spostamenti.

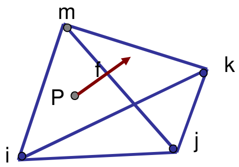


Il Metodo degli Elementi Finiti

Introduzione

Il metodo degli elementi finiti è lo studio dei criteri con cui rappresentare il continuo mediante un insieme di elementi discreti localmente equivalenti, dal punto di vista statico, alle corrispondenti porzioni del continuo..

- Un insieme appropriato di funzioni viene scelto per descrivere il campo di spostamenti in seno al singolo elemento in funzione degli spostamenti nodali: funzioni di forma (approssimazione, legata alla scelta arbitraria delle funzioni di forma. In aggiunta, queste dovrebbero assicurare i requisiti di continuità degli spostamenti (congruenza) e delle deformazioni. Non sempre è possibile soddisfare tali condizioni).



$$\{f(x,y,z)\} = N\left(\{d_i\},\{d_j\},\{d_m\},\{d_k\}\right)$$

P punto generico di coordinate x,y,z interno all'elemento.
{f} spostamento del punto P

Il Metodo degli Elementi Finiti

Introduzione

Il metodo degli elementi finiti è lo studio dei criteri con cui rappresentare il continuo mediante un insieme di elementi discreti localmente equivalenti, dal punto di vista statico, alle corrispondenti porzioni del continuo..

- Dal campo di spostamento definito sopra, è possibile ricavare il campo di deformazione corrispondente, sempre in seno all'elemento. Noto il campo di deformazione, si risale al campo di tensione, assunto il legame costitutivo del materiale e tenuto conto anche di eventuali deformazioni iniziali e tensioni residue.

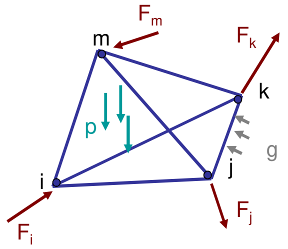
$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{zx}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}\\ \frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial w}{\partial z}\\ \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\\ \frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\end{Bmatrix} \longrightarrow [D],\ \{\varepsilon_0\},\{\sigma_0\} \longrightarrow \{\sigma\}=[D](\{\varepsilon\}-\{\varepsilon_0\})+\{\sigma_0\}$$

Il Metodo degli Elementi Finiti

Introduzione

Il metodo degli elementi finiti è lo studio dei criteri con cui rappresentare il continuo mediante un insieme di elementi discreti localmente equivalenti, dal punto di vista statico, alle corrispondenti porzioni del continuo..

- Si determina un sistema di forze concentrate ai nodi che faccia equilibrio alle tensioni sul contorno e ad ogni carico distribuito nell'elemento. (approssimazione: concentrando le forze ai nodi, la condizione di equilibrio statico è verificata soltanto globalmente.)



Si cerca infine ancora una relazione di equilibrio di elemento del tipo:

$$\{F\}^e=[K]^e\{d\}^e+\{F\}_p^e+\{F\}_{\varepsilon 0}^e+..$$

determinando $[K]^e,\{F\}_p^e,\{F\}_{\varepsilon 0}^e$ tramite opportune operazioni dipendenti dal tipo di elemento

Il Metodo degli Elementi Finiti

Introduzione

Il metodo degli elementi finiti è lo studio dei criteri con cui rappresentare il continuo mediante un insieme di elementi discreti localmente equivalenti, dal punto di vista statico, alle corrispondenti porzioni del continuo..

Con queste ipotesi, il problema è ricondotto al caso del calcolo strutturale matriciale. Si può cioè scrivere la condizione di equilibrio per ogni elemento:

$$\{F\}^e = [K]^e \{d\}^e + \{F\}_p^e + \{F\}_{\varepsilon 0}^e + \dots$$

Successivamente la condizione di equilibrio viene imposta a livello di struttura (discreta):

$$[K]\{d\} = \{R\} - \{F\}_p - \{F\}_{\varepsilon_0} - \dots$$

La soluzione segue infine l'iter già visto per i sistemi discreti..

Problemi piani:

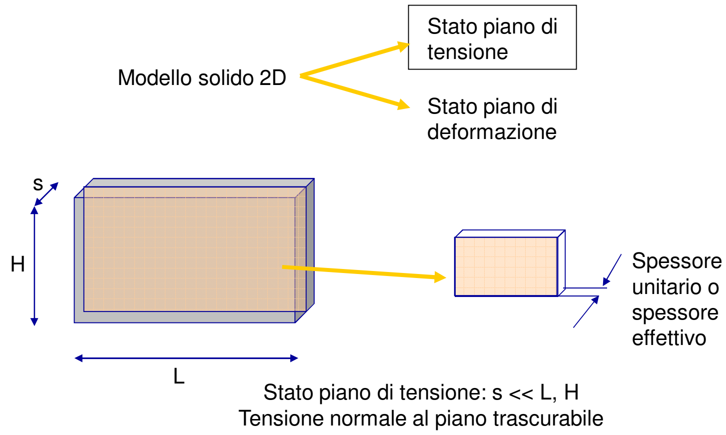
L'elemento triangolare a 3 nodi

Dalle dispense del prof. Dario Amodio e dalle lezioni del prof. Giovanni Santucci

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elementi bidimensionali: stato di tensione piana

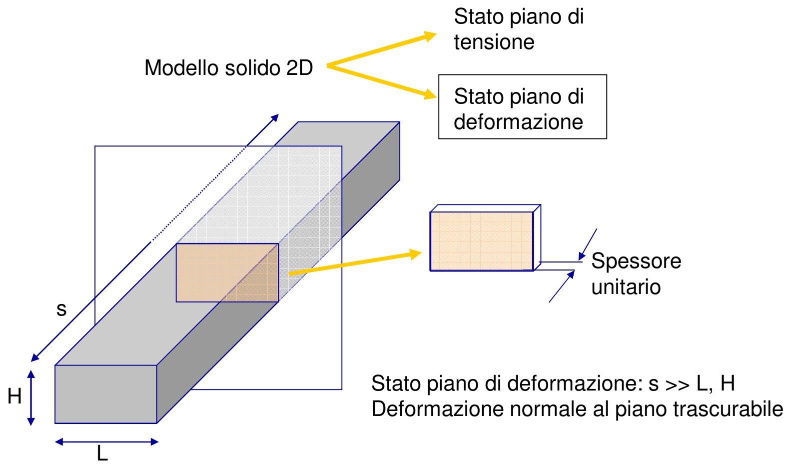
In molti casi, pur essendo l'oggetto da studiare un solido continuo, la schematizzazione del comportamento strutturale può essere fatta con un modello continuo bidimensionale, con un sufficiente grado di approssimazione. Ciò è possibile quando la generica sezione trasversale sia rappresentativa del comportamento dell'intero solido



Il Metodo degli Elementi Finiti

Elementi bidimensionali: stato di deformazione piana

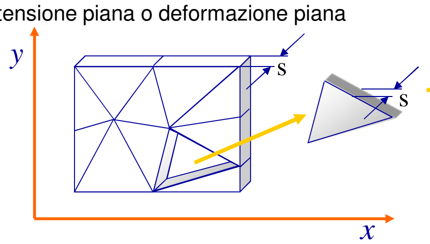
In molti casi, pur essendo l'oggetto da studiare un solido continuo, la schematizzazione del comportamento strutturale può essere fatta con un modello continuo bidimensionale, con un sufficiente grado di approssimazione. Ciò è possibile ogniqualvolta la generica sezione trasversale sia rappresentativa del comportamento dell'intero solido

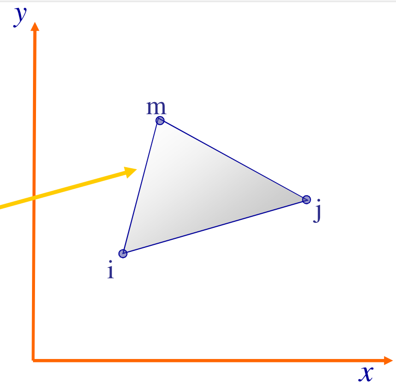


Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi

Si consideri un solido (omogeneo ed isotropo) e si ipotizzi che carichi e vincoli, ad esso applicati, siano tali da generare un campo piano di spostamenti e che tale piano sia normale allo spessore. In tal caso è spesso possibile ricondursi ai casi visti prima di stato di tensione piana o deformazione piana





In queste condizioni è possibile rappresentare il comportamento strutturale del solido con un modello piano.

Si divida il solido in una serie di elementi triangolari, di dimensioni finite.

Si immagini ora di estrarre uno di tali triangoli dal continuo e di studiare il suo comportamento riferendolo ad un sistema di coordinate cartesiano.

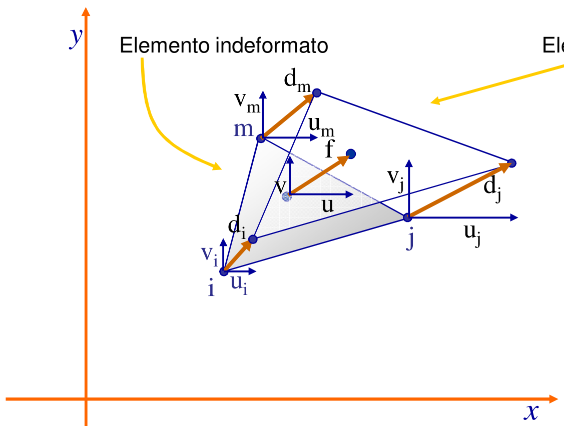
Per le ipotesi e le assunzioni fatte l'elemento può solo spostarsi, deformandosi, sul piano x y.

Ogni suo punto ha quindi due componenti di spostamento, che indicheremo come u e v.

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi

Consideriamo quindi l'elemento e, dotato di spessore s, nel piano x y.
L'elemento è un triangolo di vertici i, j , m



Elemento deformato

Prendiamo anche in considerazione ciò che accade ad un generico punto interno dell'elemento:

Quando la struttura viene posta sotto carico si deforma. L'elemento subisce un campo di spostamenti, completamente definibile dagli spostamenti dei tre nodi di vertice i, j ed m

Le componenti di spostamento del generico punto interno dell'elemento possono essere espressi come funzioni degli spostamenti nodali.

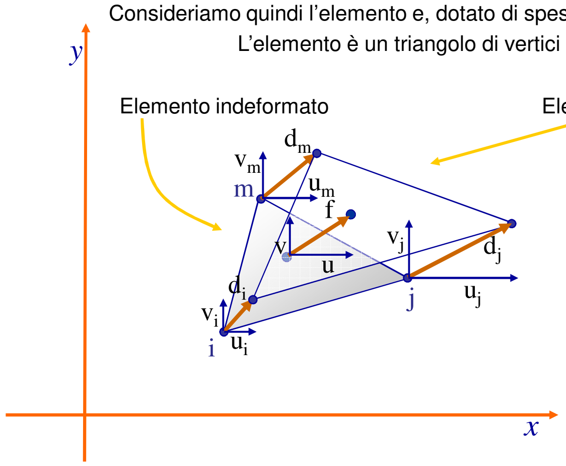
Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice delle funzioni di forma

Consideriamo quindi l'elemento e, dotato di spessore s, nel piano x y.
L'elemento è un triangolo di vertici i, j , m

Elemento indeformato

Elemento deformato



Indichiamo con {f} il vettore degli spostamenti di un generico punto interno.

Le componenti del vettore {f} sono u e v:

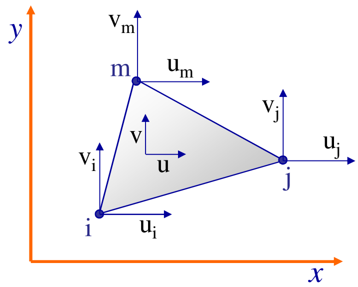
$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

{f} dipende dal vettore degli spostamenti nodali di elemento $\{d\}^e$ tramite una matrice di forma [N] che contiene le funzioni di spostamento:

$$\boxed{\{f\} = [N]\{d\}^e}$$

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice delle funzioni di forma



Nel caso di elemento piano a tre nodi

$r_e = 2$
$m = 3$

$$\{d\}^e = \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \\ d_m \end{Bmatrix}^e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}^e$$

$$\{f\} = [N]\{d\}^e \longrightarrow \{f\} = \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \\ d_m \end{Bmatrix}^e$$

$[N]_i$, $[N]_j$ ed $[N]_m$ sono quadrate di dimensioni 2 x 2

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice delle funzioni di forma

Le matrici $[N]_i$, $[N]_j$ ed $[N]_m$ possono essere viste (sempre, non solo in questo caso particolare!) come il prodotto di una funzione per la matrice identità:

$$[N] = \left[[I]\cdot N'_i \quad [I]\cdot N'_j \quad [I]\cdot N'_m \right] \qquad [I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e N'_i , N'_j ed N'_m sono funzioni arbitrarie, note con il nome di funzioni di spostamento o di forma, le quali legano il campo degli spostamenti interni all'elemento al vettore degli spostamenti nodali.

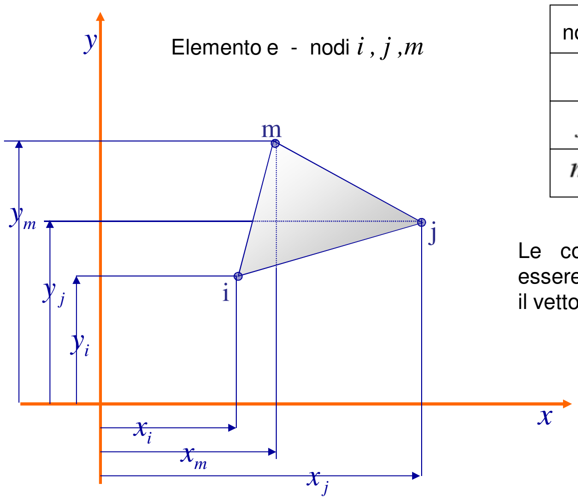
Chiaramente:

$$\{f\} = \{f(x,y,z)\},\ [N]_k = [N(x,y,z)]_k$$

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice delle funzioni di forma

Le funzioni N'_i , N'_j ed N'_m dipenderanno dalle coordinate nodali dell'elemento



nodo	coordinate
	x_i y_i
j	x_j y_j
m	x_m y_m

Le coordinate nodali devono essere note per poter calcolare il vettore degli spostamenti.

Il Metodo degli Elementi Finiti

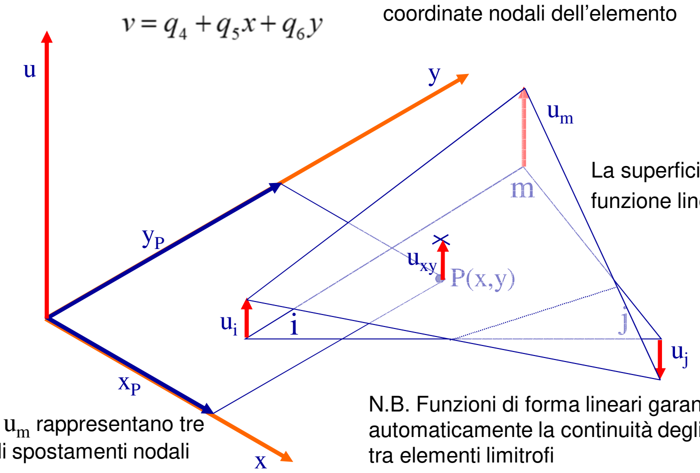
Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice delle funzioni di forma

Le più semplici funzioni di spostamento che possono essere pensate sono di tipo lineare:

$$u = q_1 + q_2 x + q_3 y$$

$$v = q_4 + q_5 x + q_6 y$$

Essendo q sei costanti dipendenti dalle coordinate nodali dell'elemento



La superficie rappresenta la funzione lineare di x e y

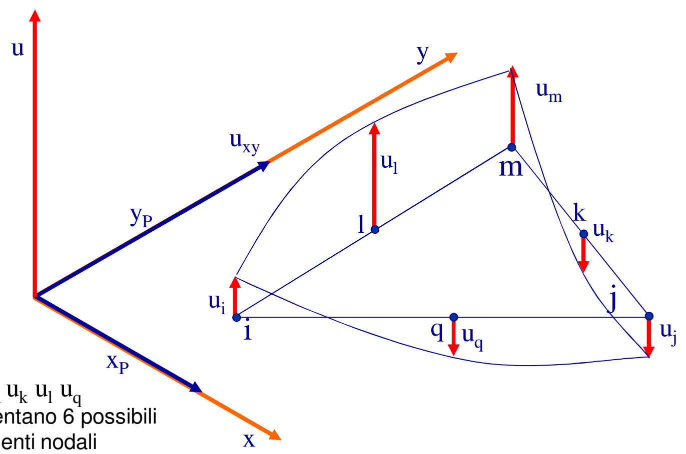
u_i, u_j e u_m rappresentano tre possibili spostamenti nodali

N.B. Funzioni di forma lineari garantiscono automaticamente la continuità degli spostamenti tra elementi limitrofi

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice delle funzioni di forma

Adottando una funzione di grado superiore (nell'esempio rappresentato quadratica) si avrebbe una superficie più complessa e la sua definizione richiederebbe un maggior numero di punti nodali



u_i, u_j u_m u_k u_l u_q rappresentano 6 possibili spostamenti nodali

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice delle funzioni di forma

Nel caso di funzioni di forma lineari le costanti possono essere calcolate imponendo che le funzioni di spostamento assumano nei nodi esattamente il valore dello spostamento nodale.

$$u_i = q_1 + q_2 x_i + q_3 y_i \qquad v_i = q_4 + q_5 x_i + q_6 y_i$$

$$u_j = q_1 + q_2 x_j + q_3 y_j \qquad v_j = q_4 + q_5 x_j + q_6 y_j$$

$$u_m = q_1 + q_2 x_m + q_3 y_m \qquad v_m = q_4 + q_5 x_m + q_6 y_m$$

Ne derivano 2 sistemi, di 3 equazioni in 3 incognite, che consentono di calcolare i valori delle q.

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} v_i \\ v_j \\ v_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix}$$

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice delle funzioni di forma

I valori delle incognite q sono calcolati come segue

Dal primo dei due sistemi si ha:

$$q_1 = \frac{a_i u_i + a_j u_j + a_m u_m}{2\Delta}$$

Dove a_i, a_j e a_m sono i minori della matrice dei coefficienti che si ottengono escludendo <u>la prima</u> colonna:

e dove Δ ha il significato:

$$\Delta = \frac{1}{2}\det \begin{bmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \\ x_m & y_m \end{bmatrix}$$

= area del triangolo i j m

Matrice dei coefficienti

Per i minori:

$$a_i = x_j y_m - x_m y_j \qquad a_j = -(x_i y_m - x_m y_i) \qquad a_m = x_i y_j - x_j y_i$$

$$\begin{bmatrix} x_i & y_i \\ \boxed{\begin{matrix} x_j & y_j \\ x_m & y_m \end{matrix}} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} x_i & y_i \end{matrix}} \\ x_j & y_j \\ \boxed{\begin{matrix} x_m & y_m \end{matrix}} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{matrix}} \\ x_m & y_m \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{c|cc} & + & - \quad + \\ \hline + & x_i & y_i \\ - & x_j & y_j \\ + & x_m & y_m \end{array}$$

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice delle funzioni di forma

I valori delle incognite q sono calcolati come segue

Ancora dal primo dei due sistemi si calcola le seconda incognita:

$$q_2 = \frac{b_i u_i + b_j u_j + b_m u_m}{2\Delta}$$

$$b_i = y_j - y_m \qquad b_j = y_m - y_i \qquad b_m = y_i - y_j$$

Dove b_i, b_j e b_m sono i minori della matrice dei coefficienti che si ottengono escludendo <u>la seconda</u> colonna:

e la terza incognita:

$$q_3 = \frac{c_i u_i + c_j u_j + c_m u_m}{2\Delta}$$

$$c_i = x_m - x_j \qquad c_j = x_i - x_m \qquad c_m = x_j - x_i$$

Dove c_i, c_j e c_m sono i minori della matrice dei coefficienti che si ottengono escludendo <u>la terza</u> colonna:

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice delle funzioni di forma

Gli altri tre valori delle incognite q si ottengono semplicemente introducendo nelle relazioni precedenti le componenti di spostamento v in luogo di u

$$q_4 = \frac{a_i v_i + a_j v_j + a_m v_m}{2\Delta}$$

$$q_5 = \frac{b_i v_i + b_j v_j + b_m v_m}{2\Delta}$$

$$q_6 = \frac{c_i v_i + c_j v_j + c_m v_m}{2\Delta}$$

avendo a_i, a_j , a_m , b_i, b_j , b_m , c_i, c_j e c_m gli stessi valori calcolati prima in funzione delle coordinate nodali dell'elemento e riportati qui per riepilogo.

$$\begin{cases} a_i = x_j y_m - x_m y_j \\ a_j = x_m y_i - x_i y_m \\ a_m = x_i y_j - x_j y_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_i = y_j - y_m \\ b_j = y_m - y_i \\ b_m = y_i - y_j \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_i = x_m - x_j \\ c_j = x_i - x_m \\ c_m = x_j - x_i \end{cases}$$

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice delle funzioni di forma

A questo punto sostituendo le q nelle equazioni delle funzioni di forma sono calcolabili le componenti del vettore $\{f\}$ di spostamento dei punti interni all'elemento, u e v, in funzione degli spostamenti nodali e delle coordinate x e y:

$$u = \frac{1}{2\Delta}\left[(a_i + b_i x + c_i y)\cdot u_i + (a_j + b_j x + c_j y)\cdot u_j + (a_m + b_m x + c_m y)\cdot u_m\right]$$
$$v = \frac{1}{2\Delta}\left[(a_i + b_i x + c_i y)\cdot v_i + (a_j + b_j x + c_j y)\cdot v_j + (a_m + b_m x + c_m y)\cdot v_m\right]$$

$$u = \frac{1}{2\Delta}\left[N_i'\cdot u_i + N_j'\cdot u_j + N_m'\cdot u_m\right]$$
$$v = \frac{1}{2\Delta}\left[N_i'\cdot v_i + N_j'\cdot v_j + N_m'\cdot v_m\right]$$

Dove le funzioni N'_k sono espresse da:

$$N_k' = \frac{1}{2\Delta}(a_k + b_k x + c_k y) \quad \text{per k=i,j,m}$$

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice delle funzioni di forma

Le relazioni precedenti possono scriversi in forma matriciale come segue:

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \left[[I]N_i' \quad [I]N_j' \quad [I]N_m'\right] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix}^e$$

ed in modo più compatto:

$$\{f\} = \left[N_i \quad N_j \quad N_m\right] \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \\ d_m \end{Bmatrix}^e$$

$$\{f\} = [N]\{d\}^e$$

Si ricorda che le funzioni di spostamento dipendono dalle coordinate del punto interno all'elemento e dalle coordinate dei nodi mediante le a_k, b_k, c_k e Δ:

$$N_k' = \frac{1}{2\Delta}(a_k + b_k x + c_k y) \qquad \text{per k=i,j,m}$$

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice di deformazione

Note le funzioni di forma, sia nell'ipotesi di stato di tensione piana che di deformazione piana il vettore delle deformazioni può scriversi:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

le componenti di spostamento u e v sono date dalle relazioni:

$$u = N'_i \cdot u_i + N'_j \cdot u_j + N'_m \cdot u_m$$

$$v = N'_i \cdot v_i + N'_j \cdot v_j + N'_m \cdot v_m$$

N.b. Nello stato di tensione piana la ε_z non è nulla, ma non contribuisce all'energia elastica di deformazione essendo σ_z=0 per ipotesi. Verrà per ora trascurata nella trattazione. Si può comunque calcolare a posteriori tramite $\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$.

Segue che:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta}(b_i u_i + b_j u_j + b_m u_m) \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2\Delta}(c_i v_i + c_j v_j + c_m v_m)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta}(c_i u_i + b_i v_i + c_j u_j + b_j v_j + c_m u_m + b_m v_m)$$

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice di deformazione

Legame tra le componenti della deformazione e spostamenti nodali, in forma matriciale:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix} \{d\}^e \qquad \{\varepsilon\} = [B]\{d\}^e$$

La matrice di deformazione [B] ha dimensioni r_ε x (r_em), nel caso in esame 3x6, e può essere divisa in tre sottomatrici 3x2 del tipo:

$$[B_k] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_k & 0 \\ 0 & c_k \\ c_k & b_k \end{bmatrix} \quad \text{per } k=i,j,m$$

N.B. Nel caso dell'elemento piano a 3 nodi i termini della matrice [B] sono costanti, infatti non contengono le variabili x,y. La deformazione è descritta come costante in tutto l'elemento. Ciò introduce una approssimazione importante nel rappresentare elevati gradienti di deformazione.

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice di deformazione

La deformazione appena calcolata, in funzione degli spostamenti nodali è quella totale. Per calcolare correttamente lo stato di tensione, è necessario sottrarre alla deformazione totale eventuali deformazioni iniziali, quali ad esempio, le dilatazioni termiche:

$$\{\varepsilon_0\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{x0} \end{Bmatrix} = \alpha \cdot \Delta T \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

valida nel caso di stato piano di tensione

oppure:

$$\{\varepsilon_0\} = (1+\nu) \cdot \alpha \cdot \Delta T \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

valida nel caso di stato piano di deformazione

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice di elasticità

Lo stato di tensione in un punto dell'elemento è descritto dal vettore $\{\sigma\}$, composto da r_σ termini (in questo caso ancora 3).
In condizioni di comportamento elastico del materiale, tale vettore può essere espresso come :

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\}$$

La matrice [D] ha dimensioni 3x3; il vettore $\{\sigma_0\}$ rappresenta l'eventuale stato di tensione residuo preesistente nel materiale prima dell'applicazione del carico.

Le matrici $[D]$ per lo stato piano di tensione e per lo stato di deformazione piana si ottengono invertendo le relative relazioni di Hooke, ovvero ricavando le σ in funzione delle ε

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice di elasticità

Matrice di elasticità $[D]$ per lo stato piano di tensione

Legge di Hooke scritta per lo stato piano di tensione:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \tau_{xy}\frac{2(1+\nu)}{E}$$

Invertendo si trova la relazione $\{\sigma\}_{el} = [D]\{\varepsilon\}_{el}$

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Stato piano di tensione

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice di elasticità

Matrice di elasticità $[D]$ per lo stato piano di deformazione ($\varepsilon_z = 0$)

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = 0 \longrightarrow \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

dalla legge di Hooke si ha:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \longrightarrow \varepsilon_x = \frac{1-\nu^2}{E}\left[\sigma_x - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_y\right]$$

$$\longrightarrow \varepsilon_y = \frac{1-\nu^2}{E}\left[\sigma_y - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_x\right]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \tau_{xy}\frac{2(1+\nu)}{E}$$

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice di elasticità

Matrice di elasticità $[D]$ per lo stato piano di deformazione ($\varepsilon_z = 0$)

$$\varepsilon_x = \frac{1-\nu^2}{E}\left[\sigma_x - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_y\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1-\nu^2}{E}\left[\sigma_y - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_x\right]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \tau_{xy}\frac{2(1+\nu)}{E}$$

Invertendo si trova la relazione

$$\{\sigma\}_{el} = [D]\{\varepsilon\}_{el}$$

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

Stato piano di deformazione

Nonostante la componente dello stato tensionale σ_z sia diversa da zero, nel caso di deformazione piana, non compie alcun lavoro, essendo nulla la ε_z e, pertanto, essa non viene presa in considerazione: la matrice $[D]$ rimane una 3x3.

Il Metodo degli Elementi Finiti

Relazione di equilibrio di elemento

La relazione che esprime la condizione di equilibrio dell'elemento nel continuo si può ricavare chiamando in causa il principio dei lavori virtuali

$\{F\}^e$ vettore delle forze esterne agenti sull'elemento, applicate direttamente ai nodi:

$$\{F\}^e = \begin{Bmatrix} F_1 \\ .. \\ F_i \\ .. \\ F_m \end{Bmatrix} \qquad \{F_i\}^e = \begin{Bmatrix} F_{i1} \\ .. \\ F_{in_e} \end{Bmatrix}$$

N.B. In questo caso $\{F\}^e$ rappresenta le forze nodali che sono staticamente equivalenti alle tensioni $\{\sigma\}$ realmente agenti sul contorno dell'elemento.

$\{p\}$ vettore dei carichi distribuiti per unità di volume, ad esempio dovuto ad azioni inerziali:

$$\{p\} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}$$

La condizione di equilibrio tra le forze esterne e le reazioni interne, dovute allo stato tensionale, si ricava tramite il principio dei lavori virtuali

Supponendo l'elemento in equilibrio, imponendo un campo di arbitrari spostamenti virtuali il lavoro compiuto dalle forze esterne deve eguagliare quello compiuto dalle forze interne

$$\boxed{\mathcal{L}_e = \mathcal{L}_i}$$

Il Metodo degli Elementi Finiti

Relazione di equilibrio di elemento

$$\mathcal{L}_e = \mathcal{L}_i \quad \rightarrow \quad \{d^*\}^e$$

campo di spostamenti virtuali.

Lo spostamento interno virtuale e la deformazione conseguente al campo di spostamenti virtuali sono date dai vettori:

$$\{f^*\} = [N]\{d^*\}^e \rightarrow \{f^*\}^{\mathrm{T}} = \left[\{d^*\}^e\right]^{\mathrm{T}} [N]^{\mathrm{T}}$$

$$\{\varepsilon^*\} = [B]\{d^*\}^e$$

Il lavoro virtuale compiuto dalle forze esterne vale:

$$\mathcal{L}_e = \left[\{d^*\}^e\right]^{\mathrm{T}} \{F\}^e + \int_V \{f^*\}^{\mathrm{T}} \{p\} dV = \left[\{d^*\}^e\right]^{\mathrm{T}} \left(\{F\}^e + \int_V [N]^{\mathrm{T}} \{p\} dV \right)$$

Il lavoro virtuale compiuto dalle tensioni interne vale:

$$\mathcal{L}_i = \int_V \left[\{\varepsilon^*\}\right]^{\mathrm{T}} \{\sigma\} dV = \left[\{d^*\}^e\right]^{\mathrm{T}} \int_V [\mathrm{B}]^{\mathrm{T}} \{\sigma\} dV$$

Uguagliando i lavori si ottiene:

$$\left[\{d^*\}^e\right]^{\mathrm{T}} \left(\{F\}^e + \int_V [N]^{\mathrm{T}} \{p\} dV \right) = \left[\{d^*\}^e\right]^{\mathrm{T}} \int_V [\mathrm{B}]^{\mathrm{T}} \{\sigma\} dV$$

Il Metodo degli Elementi Finiti

Relazione di equilibrio di elemento

$$\cancel{\left[\{d^*\}^e\right]^{\mathrm{T}}} \left(\{F\}^e + \int_V [N]^{\mathrm{T}} \{p\} dV \right) = \cancel{\left[\{d^*\}^e\right]^{\mathrm{T}}} \int_V [\mathrm{B}]^{\mathrm{T}} \{\sigma\} dV$$

eliminando lo spostamento virtuale d'elemento si ottiene:

$$\{F\}^e = \int_V [B]^{\mathrm{T}} \{\sigma\} dV - \int_V [N]^{\mathrm{T}} \{p\} dV$$

Ricordando le relazioni:

$$\{\varepsilon\} = [B]\ \{d\}^e$$

$$\{\sigma\} = [D]\ (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\}$$

$$\{\sigma\} = [D]\ ([B]\{\mathrm{d}\}^e - \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\}$$

$$\{F\}^e = \left(\int_V [B]^{\mathrm{T}} [D]\ [B]\ dV \right) \{d\}^e - \int_V [B]^{\mathrm{T}} [D]\ \{\varepsilon_0\} dV + \int_V [B]^{\mathrm{T}} \{\sigma_0\} dV - \int_V [N]^{\mathrm{T}} \{p\} dV$$

Il Metodo degli Elementi Finiti

Relazione di equilibrio di elemento

$$\{F\}^e = \left(\int_V [B]^T [D]\,[B]\, dV \right) \{d\}^e - \int_V [B]^T [D]\,\{\varepsilon_0\} dV + \int_V [B]^T \{\sigma_0\} dV - \int_V [N]^T \{p\} dV$$

Questa relazione è del tipo: $\{F\}^e = [K]^e \{d\}^e + \{F\}^e_{\varepsilon_0} + \{F\}^e_{\sigma_0} + \{F\}^e_p$

In conclusione si può scrivere:

$$[K]^e = \int_V [B]^T [D]\,[B]\, dV$$

Matrice di rigidezza di elemento

$$\{F\}^e_{\varepsilon_0} = -\int_V [B]^T [D]\,\{\varepsilon_0\} dV$$

Forze nodali equivalenti alla deformazione iniziale (dilatazione termica)

$$\{F\}^e_{\sigma_0} = \int_V [B]^T \{\sigma_0\} dV$$

Forze nodali equivalenti alla tensione iniziale (tensioni residue)

$$\{F\}^e_p = -\int_V [N]^T \{p\} dV$$

Forze equivalenti a carichi uniformemente distribuiti (pressioni, forze di massa)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Relazione di equilibrio di elemento

Se l'elemento appartiene al confine esterno del continuo, su di esso potrebbe agire un carico distribuito, il cui valore per unità di lunghezza potrebbe essere espresso tramite il vettore:

$$\{g\} = [g_x \;\; g_y \;\; g_z]^T$$

Alle forze nodali equivalenti elencate in precedenza andrebbe allora aggiunto il vettore:

$$\{F\}^e_g = -\int_C [N]^T \{g\} dC$$

Dove l'integrazione si intende estesa sulla porzione di contorno sul quale agisce il carico distribuito appartenente all'elemento considerato.
In alternativa i carichi distribuiti agenti sul contorno possono inglobarsi nei carichi concentrati esterni di struttura descritti dal vettore $\{R\}$ (vedi sezione successiva).

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice di rigidezza, stato piano di tensione

Si può procedere ora al calcolo della matrice di rigidezza nel caso di elemento piano a tre nodi in stato piano di tensione.

Come si è visto per l'elemento triangolare a deformazione costante i coefficienti della matrice $[B]$ sono delle costanti. L'integrazione è dunque una semplice moltiplicazione.

Indicando con t lo spessore (costante) dell'elemento si può scrivere:

$$[K]^e = [B]^T[D]\,[B]\,V = \begin{bmatrix} B_i^T \\ B_j^T \\ B_m^T \end{bmatrix} [D]\,[B_i \quad B_j \quad B_m] \cdot t \cdot \Delta$$

$$[K]^e = \begin{bmatrix} B_i^T D B_i & B_i^T D B_j & B_i^T D B_m \\ B_j^T D B_i & B_j^T D B_j & B_j^T D B_m \\ B_m^T D B_i & B_m^T D B_j & B_m^T D B_m \end{bmatrix} \cdot t \cdot \Delta$$

La generica sottomatrice può essere scritta come segue:

$$[K]_{rs} = [B]_r^T [D]\,[B]_s \cdot t \cdot \Delta$$

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice di rigidezza, stato piano di tensione

$$[K]_{rs} = [B]_r^T [D]\,[B]_s \cdot t \cdot \Delta \quad = \frac{1}{2\Delta}\begin{bmatrix} b_r & 0 & c_r \\ 0 & c_r & b_r \end{bmatrix} [D]\,\frac{1}{2\Delta}\begin{bmatrix} b_s & 0 \\ 0 & c_s \\ c_s & b_s \end{bmatrix} \cdot t \cdot \Delta$$

$$[K]_{rs} = \begin{bmatrix} b_r & 0 & c_r \\ 0 & c_r & b_r \end{bmatrix} [D] \begin{bmatrix} b_s & 0 \\ 0 & c_s \\ c_s & b_s \end{bmatrix} \cdot \frac{t}{4\Delta}$$

$$D = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$[K]_{rs} = \frac{E}{1-\nu^2}\frac{t}{4\Delta}\begin{bmatrix} b_r b_s + \frac{1-\nu}{2} c_r c_s & \nu b_r c_s + \frac{1-\nu}{2} c_r b_s \\ \nu c_r b_s + \frac{1-\nu}{2} b_r c_s & c_r c_s + \frac{1-\nu}{2} b_r b_s \end{bmatrix}$$

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice di rigidezza, stato piano di tensione

$$[K]^e = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} & K_{im} \\ K_{ji} & K_{jj} & K_{jm} \\ K_{mi} & K_{mj} & K_{mm} \end{bmatrix}$$

La generica sottomatrice $[K]_{rs}$

$$[K]_{rs} = \frac{E}{1-\nu^2}\frac{t}{4\Delta}\begin{bmatrix} b_r b_s + \frac{1-\nu}{2} c_r c_s & \nu b_r c_s + \frac{1-\nu}{2} c_r b_s \\ \nu c_r b_s + \frac{1-\nu}{2} b_r c_s & c_r c_s + \frac{1-\nu}{2} b_r b_s \end{bmatrix}$$

L.Cortese Costruzione di Macchine e Progettazione agli Elementi Finiti (a.a. *2017-2018*)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice di rigidezza, stato piano di tensione

La matrice di rigidezza di elemento completa

$$[K]^e = \frac{E}{1-\nu^2}\frac{t}{4\Delta}\begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ii} & K_{ii} \\ K_{ji} & K_{ji} & K_{ji} \\ K_{mi} & K_{mi} & K_{mi} \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc}
b_i b_i + \frac{1-\nu}{2} c_i c_i & \nu b_i c_i + \frac{1-\nu}{2} c_i b_i & b_i b_j + \frac{1-\nu}{2} c_i c_j & \nu b_i c_j + \frac{1-\nu}{2} c_i b_j & b_i b_m + \frac{1-\nu}{2} c_i c_m & \nu b_i c_m + \frac{1-\nu}{2} c_i b_m \\
\nu c_i b_i + \frac{1-\nu}{2} b_i c_i & c_i c_i + \frac{1-\nu}{2} b_i b_i & \nu c_i b_j + \frac{1-\nu}{2} b_i c_j & c_i c_j + \frac{1-\nu}{2} b_i b_j & \nu c_i b_m + \frac{1-\nu}{2} b_i c_m & c_i c_m + \frac{1-\nu}{2} b_i b_m \\
\hline
b_j b_i + \frac{1-\nu}{2} c_j c_i & \nu b_j c_i + \frac{1-\nu}{2} c_j b_i & b_j b_j + \frac{1-\nu}{2} c_j c_j & \nu b_j c_j + \frac{1-\nu}{2} c_j b_j & b_j b_m + \frac{1-\nu}{2} c_j c_m & \nu b_j c_m + \frac{1-\nu}{2} c_{ij} b_m \\
\nu c_j b_i + \frac{1-\nu}{2} bjc_i & c_j c_i + \frac{1-\nu}{2} b_j b_i & \nu c_j b_j + \frac{1-\nu}{2} b_{ij} c_j & c_j c_j + \frac{1-\nu}{2} b_j b_j & \nu c_j b_m + \frac{1-\nu}{2} b_j c_m & c_j c_m + \frac{1-\nu}{2} b_j b_m \\
\hline
b_m b_i + \frac{1-\nu}{2} c_m c_i & \nu b_m c_i + \frac{1-\nu}{2} c_m b_i & b_m b_j + \frac{1-\nu}{2} c_m c_j & \nu b_m c_j + \frac{1-\nu}{2} c_m b_j & b_m b_m + \frac{1-\nu}{2} c_m c_m & \nu b_m c_m + \frac{1-\nu}{2} c_m b_m \\
\nu c_m b_i + \frac{1-\nu}{2} b_m c_i & c_m c_i + \frac{1-\nu}{2} b_m b_i & \nu c_m b_j + \frac{1-\nu}{2} b_m c_j & c_m c_j + \frac{1-\nu}{2} b_m b_j & \nu c_m b_m + \frac{1-\nu}{2} b_m c_m & c_m c_m + \frac{1-\nu}{2} b_m b_m
\end{array}\right]$$

L.Cortese Costruzione di Macchine e Progettazione agli Elementi Finiti (a.a. *2017-2018*)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: forze nodali equivalenti

A questo punto devono essere valutate anche le forze nodali equivalenti

$$\{F_{\varepsilon 0}\}^e = -\int_V [B]^T [D] \{\varepsilon_0\} dV$$

Forze nodali equivalenti alle deformazioni iniziali (ex: dilatazione termica)

$$\{F_{\sigma 0}\}^e = \int_V [B]^T \{\sigma_0\} dV$$

Forze nodali equivalenti alla tensione iniziale (ex: tensioni residue)

$$\{F_p\}^e = -\int_V [N]^T \{p\} dV$$

Forze equivalenti a carichi uniformemente distribuiti (ex: forze di massa)

N.b. Per l'elemento piano: $\{p\} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}$

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: forze nodali equivalenti

Con un po' di passaggi algebrici:

$$\{F_{\varepsilon 0}\}^e = -\frac{E\,\alpha \Delta T t}{2(1-\nu^2)} \begin{Bmatrix} b_i + \nu b_i \\ \nu c_i + c_i \\ b_j + \nu b_j \\ \nu c_j + c_j \\ b_m + \nu b_m \\ \nu c_m + c_m \end{Bmatrix}$$

$$\{F_p\}^e = -\left(\int_V [N]^T dV \right) \{p\} = -\left(\int_V \begin{Bmatrix} \mathrm{I}N'_i \\ \mathrm{I}N'_j \\ \mathrm{I}N'_m \end{Bmatrix} dV \right) \{p\}$$