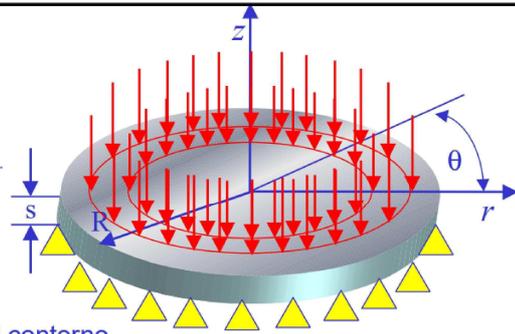
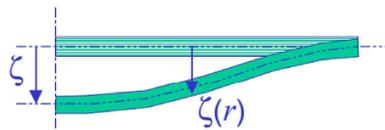


## Lastre piane circolari

Lastra circolare di raggio  $R$  e spessore costante  $s$   
 $s \ll R$

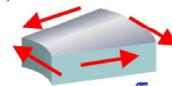
Ipotesi:



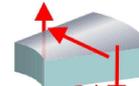
- Materiale omogeneo ed isotropo.
- Vincoli assialsimmetrici: appoggio o incastro lungo il contorno.
- Carichi assialsimmetrici e normali al piano della lastra (paralleli all'asse  $z$ ).  
 La legge di variazione del carico è funzione di  $r$  ma non dipende da  $\theta$ .

Se sono valide queste ipotesi si ha:

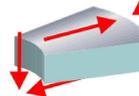
- Le tensioni tangenziali  $\tau_{\theta r}$  e  $\tau_{\theta z}$  sono nulle.
- La tensione normale  $\sigma_z$  è nulla.
- Le tensioni  $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_r$  e  $\tau_{rz}$  sono indipendenti da  $\theta$ .
- Lo spostamento  $\zeta$  è funzione del solo raggio  $r$ .
- La superficie elastica è di rivoluzione.



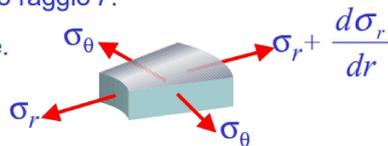
$$\tau_{\theta r} = \tau_{r\theta} = 0$$



$$\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = 0$$



$$\tau_{rz} = \tau_{zr}$$



### Lastre piane circolari

Consideriamo un elementino infinitesimo della lastra, ottenuto con due sezioni cilindriche, al raggio  $r$  e  $dr$ , del settore individuato dall'angolo  $d\theta$ .

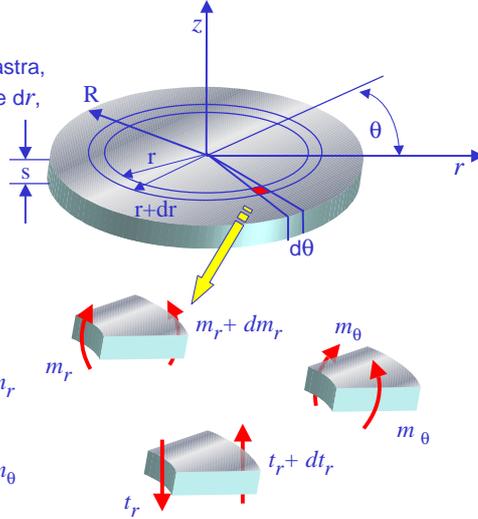
Per effetto dei carichi e dei vincoli prima definiti, sull'elementino agiranno momenti flettenti e forze di taglio:



il momento flettente, per unità di lunghezza,  $m_r$ , agente nel piano  $rz$

il momento flettente, per unità di lunghezza,  $m_\theta$  agente in un piano normale al piano  $rz$

la forza di taglio, per unità di lunghezza,  $t_r$ , agente nel piano  $rz$



### Lastre piane circolari

Ricordando che tra momenti flettenti e curvatures valgono le relazioni:

e ricordando ancora che:

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho_r} = \frac{d\varphi}{dr} \\ \frac{1}{\rho_\theta} = \frac{\varphi}{r} \end{cases} \quad \begin{cases} m_r = D \left( \frac{1}{\rho_r} + \nu \frac{1}{\rho_\theta} \right) \\ m_\theta = D \left( \frac{1}{\rho_\theta} + \nu \frac{1}{\rho_r} \right) \end{cases}$$

Si può scrivere:

$$\begin{cases} m_r = D \left( \frac{d\varphi}{dr} + \nu \frac{\varphi}{r} \right) \\ m_\theta = D \left( \frac{\varphi}{r} + \nu \frac{d\varphi}{dr} \right) \end{cases}$$

Si considerino le coppie e le forze agenti sull'elementino nel piano  $rz$ :

sul lato a agisce la coppia:  $m_r r d\vartheta$  e la forza:  $t_r r d\vartheta$

sul lato b agisce la coppia:  $(m_r + dm_r)(r + dr)d\vartheta$

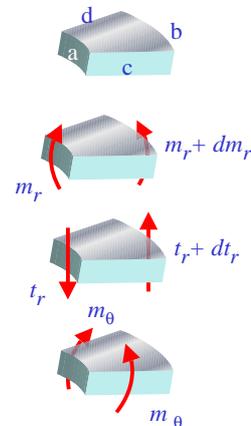
e la forza:  $(t_r + dt_r)(r + dr)d\vartheta$

sul lati c e d agiscono due coppie uguali:  $2 \times m_\theta dr \sin \frac{d\vartheta}{2}$

Per l'equilibrio alla rotazione dell'elementino, nel piano  $rz$ , confondendo  $\sin(d\theta)$  con  $d\theta$ , si ha:  $\sum m = 0$

$$(m_r + dm_r)(r + dr)d\vartheta - m_r r d\vartheta - 2m_\theta dr \frac{d\vartheta}{2} + t_r r dr d\vartheta = 0$$

coppia dovuta alla forza di taglio



### Lastre piane circolari

Ricordando che tra momenti flettenti e curvature valgono le relazioni:

e ricordando ancora che:

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho_r} = \frac{d\varphi}{dr} \\ \frac{1}{\rho_\vartheta} = \frac{\varphi}{r} \end{cases} \quad m_r = D \left( \frac{1}{\rho_r} + \nu \frac{1}{\rho_\vartheta} \right) \quad m_\vartheta = D \left( \frac{1}{\rho_\vartheta} + \nu \frac{1}{\rho_r} \right)$$

Si può scrivere:

$$m_r = D \left( \frac{d\varphi}{dr} + \nu \frac{\varphi}{r} \right) \quad m_\vartheta = D \left( \frac{\varphi}{r} + \nu \frac{d\varphi}{dr} \right)$$

$$(m_r + dm_r)(r + dr)d\vartheta - m_r r d\vartheta - 2m_\vartheta dr \frac{d\vartheta}{2} + t_r r dr d\vartheta = 0$$

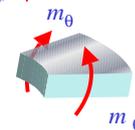
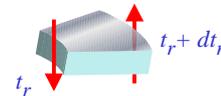
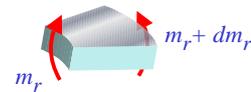
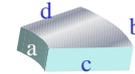
Sviluppando i prodotti e trascurando gli infinitesimi del terzo ordine si ottiene:

$$m_r dr d\vartheta + dm_r r d\vartheta - m_\vartheta dr d\vartheta + t_r r dr d\vartheta = 0$$

che si può scrivere:  $m_r + \frac{dm_r}{dr} r - m_\vartheta + t_r r = 0$

I momenti possono essere espressi in funzione dell'angolo di rotazione  $\varphi$  ottenendo l'equazione differenziale:

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \frac{\varphi}{r} = -\frac{t_r}{D}$$



### Lastre piane circolari

L'espressione di  $t_r$  dipende dal carico applicato alla piastra.

Nel caso di pressione uniforme  $p$  ed un carico concentrato  $P$ , applicato al centro della piastra, nella sezione cilindrica generica di raggio  $r$  il taglio totale:

$$t_r 2\pi r$$

deve fare equilibrio al carico:  $p\pi r^2 + P$

e, quindi, si può scrivere:

$$t_r 2\pi r = p\pi r^2 + P \quad \longrightarrow \quad t_r = \frac{pr}{2} + \frac{P}{2\pi r}$$

L'equazione differenziale di equilibrio, scritta in precedenza, può essere riscritta in una forma più comoda per l'integrazione:

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \frac{\varphi}{r} = -\frac{t_r}{D} \quad \longrightarrow \quad \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\varphi) \right] = -\frac{1}{D} \left( \frac{pr}{2} + \frac{P}{2\pi r} \right)$$

Integrando una prima volta si ha:

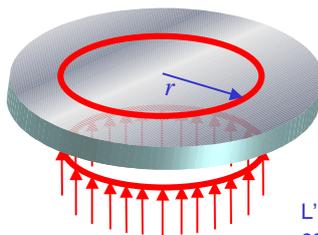
$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\varphi) = -\frac{1}{D} \left( \frac{pr^2}{4} + \frac{P}{2\pi} \ln r \right) + C_1$$

Per integrare nuovamente è utile ricordare che:

$$\int x^n \ln x \, dx = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} [(n+1) \ln x - 1]$$

Quindi, moltiplicando per  $r$  ed integrando nuovamente, si ha:

$$r\varphi = -\frac{pr^4}{16D} - \frac{P}{2\pi D} \left( \frac{r^2 \ln r}{2} - \frac{r^2}{4} \right) + C_1 \frac{r^2}{2} + C_2$$



### Lastre piane circolari

$$r\varphi = -\frac{pr^4}{16D} - \frac{P}{2\pi D} \left( \frac{r^2 \ln r}{2} - \frac{r^2}{4} \right) + C_1 \frac{r^2}{2} + C_2$$

da cui si ottiene: 
$$\varphi = -\frac{pr^3}{16D} - \frac{Pr}{8\pi D} (2\ln r - 1) + C_1 \frac{r}{2} + \frac{C_2}{r}$$

A questo punto può essere ricavata l'equazione della superficie elastica.

Ricordando che:  $\varphi = -\frac{d\zeta}{dr}$  con un'ulteriore integrazione, si ottiene:

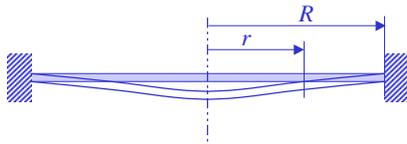
$$\zeta = \frac{pr^4}{64D} + \frac{Pr^2}{8\pi D} (\ln r - 1) - C_1 \frac{r^2}{4} - C_2 \ln r + C_3$$

Le costanti  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  si determinano mediante le condizioni al contorno.

Le condizioni al contorno dipendono dai vincoli che sono imposti alla lastra.

### Lastre piane circolari

Lastra incastrata al contorno



Condizioni al contorno:

- 1) per  $r = 0$  si ha  $\varphi = 0$
- 2) per  $r = R$  si ha  $\varphi = 0$
- 3) per  $r = R$  si ha  $\zeta = 0$

Dalla 1° condizione si ricava  $C_2 = 0$ , altrimenti per  $r = 0$  l'equazione:

$$\varphi = -\frac{pr^3}{16D} - \frac{Pr}{8\pi D} (2\ln r - 1) + C_1 \frac{r}{2} + \frac{C_2}{r} \quad \text{comporterebbe: } \varphi = \infty$$

Dalla 2° condizione si ricava: 
$$\varphi = -\frac{pR^3}{16D} - \frac{PR}{8\pi D} (2\ln R - 1) + C_1 \frac{R}{2} = 0$$

da cui si ottiene il valore della costante: 
$$C_1 = \frac{pR^2}{8D} + \frac{P}{4\pi D} (2\ln R - 1)$$

Quindi la funzione  $\varphi(r)$  è ora nota: 
$$\varphi = \frac{p}{16D} r(R^2 - r^2) + \frac{P}{4\pi D} r \ln \frac{R}{r}$$

Dalla 3° condizione si ottiene: 
$$\zeta = \frac{pR^4}{64D} + \frac{PR^2}{8\pi D} (\ln R - 1) - C_1 \frac{R^2}{4} + C_3 = 0$$

**Lastre piane circolari**

Lastra incastrata al contorno

Introducendo il valore calcolato della prima costante  $C_1 = \frac{pR^2}{8D} + \frac{P}{4\pi D}(2\ln R - 1)$

nell'equazione:  $\zeta = \frac{pR^4}{64D} + \frac{PR^2}{8\pi D}(\ln R - 1) - C_1 \frac{R^2}{4} + C_3 = 0$

si ottiene:  $\frac{pR^4}{64D} + \frac{PR^2}{8\pi D}(\ln R - 1) - \frac{pR^4}{32D} - \frac{PR^2}{16\pi D}(2\ln R - 1) + C_3 = 0$

da cui si ricava il valore della terza costante:  $C_3 = \frac{pR^4}{64D} + \frac{PR^2}{16\pi D}$

Note tutte le costanti, si può scrivere l'equazione della superficie elastica:

$$\zeta = \frac{p}{64D}(R^2 - r^2)^2 + \frac{P}{16\pi D}\left(R^2 - r^2 - 2r^2 \ln \frac{R}{r}\right)$$

**Lastre piane circolari**

Lastra incastrata al contorno: pressione uniforme

Esaminiamo ora il caso in cui agisca sulla lastra la sola pressione  $p$ : quindi  $P = 0$ .

Scriviamo le funzioni  $\varphi(r)$  e  $\zeta(r)$

$$\begin{cases} \varphi = \frac{p}{16D}r(R^2 - r^2) + \frac{P}{4\pi D}r \ln \frac{R}{r} \\ \zeta = \frac{p}{64D}(R^2 - r^2)^2 + \frac{P}{16\pi D}\left(R^2 - r^2 - 2r^2 \ln \frac{R}{r}\right) \end{cases}$$

nel caso in cui sia  $P=0$ :  $\varphi = \frac{p}{16D}r(R^2 - r^2)$        $\zeta = \frac{p}{64D}(R^2 - r^2)^2$

e la derivata di  $\varphi(r)$  vale:  $\frac{d\varphi}{dr} = \frac{p}{16D}(R^2 - 3r^2)$

I momenti flettenti possono essere calcolati ricordando le relazioni:

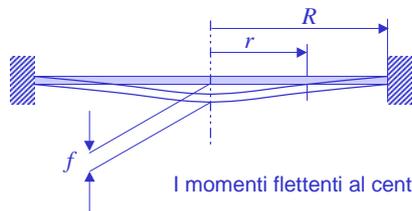
$$m_r = D\left(\frac{d\varphi}{dr} + \nu \frac{\varphi}{r}\right) \quad m_\theta = D\left(\frac{\varphi}{r} + \nu \frac{d\varphi}{dr}\right)$$

e sostituendo le espressioni ora calcolate per  $\varphi(r)$  e per la relativa derivata:

$$m_r = \frac{p}{16}[(1+\nu)R^2 - (3+\nu)r^2] \quad m_\theta = \frac{p}{16}[(1+\nu)R^2 - (1+3\nu)r^2]$$

### Lastre piane circolari

Lastra incastrata al contorno: pressione uniforme



Lo spostamento massimo (freccia  $f$ ) si verifica al centro della lastra

$$\zeta_{(r=0)} = f = \frac{pR^4}{64D} = \frac{3(1-\nu^2)}{16} \frac{pR^4}{Es^3}$$

I momenti flettenti al centro della lastra si ottengono ponendo  $r = 0$

$$m_r = m_\vartheta = (1+\nu) \frac{pR^2}{16} = (1+\nu) \frac{Q}{16\pi} \quad \text{avendo posto: } Q = p\pi R^2$$

Al contorno ( $r = R$ ) si ha:  $m_r = -\frac{pR^2}{8} = -\frac{Q}{8\pi} \quad m_\vartheta = -\nu \frac{pR^2}{8} = -\nu m_r$

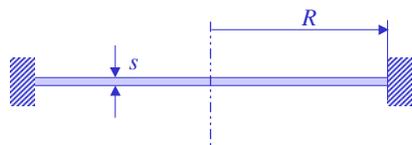
Sul bordo incastrato, infatti, la curvatura  $\frac{1}{\rho_\vartheta} = \frac{\varphi}{r}$  è nulla e, quindi, il momento  $m_\vartheta$  è dovuto unicamente all'effetto poisson. Il momento massimo è  $m_r$  al contorno,

La tensione massima si verifica, quindi, all'incastro e vale:

$$\sigma_r = \frac{m_r}{W} = \frac{6m_r}{s^2} \quad \rightarrow \quad \sigma_r(\max) = \pm \frac{3}{4} \frac{pR^2}{s^2}$$

### Lastre piane circolari

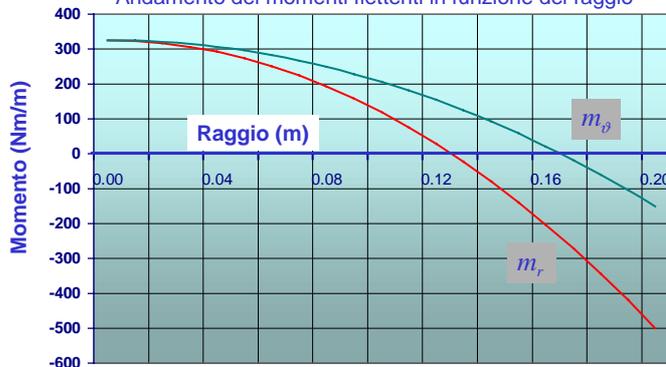
Lastra incastrata al contorno: pressione uniforme



Esempio di calcolo:

Dati:  $R = 200 \text{ mm}$   $s = 5 \text{ mm}$   
 $E = 200 \text{ GPa}$   $\nu = 0.3$   
 $p = 0.1 \text{ MPa}$

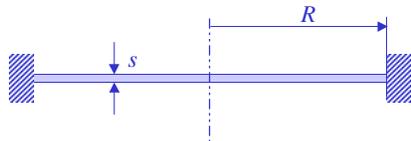
Andamento dei momenti flettenti in funzione del raggio



$$m_r = \frac{p}{16} [(1+\nu)R^2 - (3+\nu)r^2] \quad m_\vartheta = \frac{p}{16} [(1+\nu)R^2 - (1+3\nu)r^2]$$

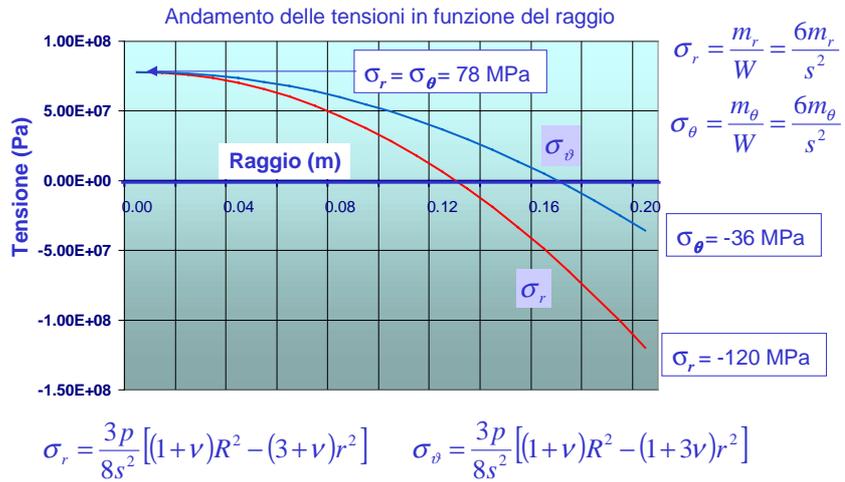
### Lastre piane circolari

Lastra incastrata al contorno: pressione uniforme



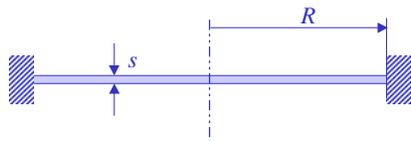
Esempio di calcolo:

Dati:  $R = 200 \text{ mm}$   $s = 5 \text{ mm}$   
 $E = 200 \text{ GPa}$   $\nu = 0.3$   
 $p = 0.1 \text{ MPa}$



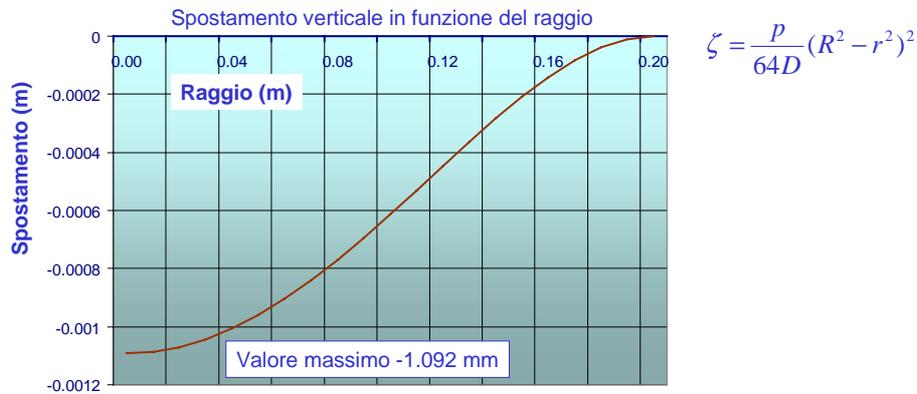
### Lastre piane circolari

Lastra incastrata al contorno: pressione uniforme



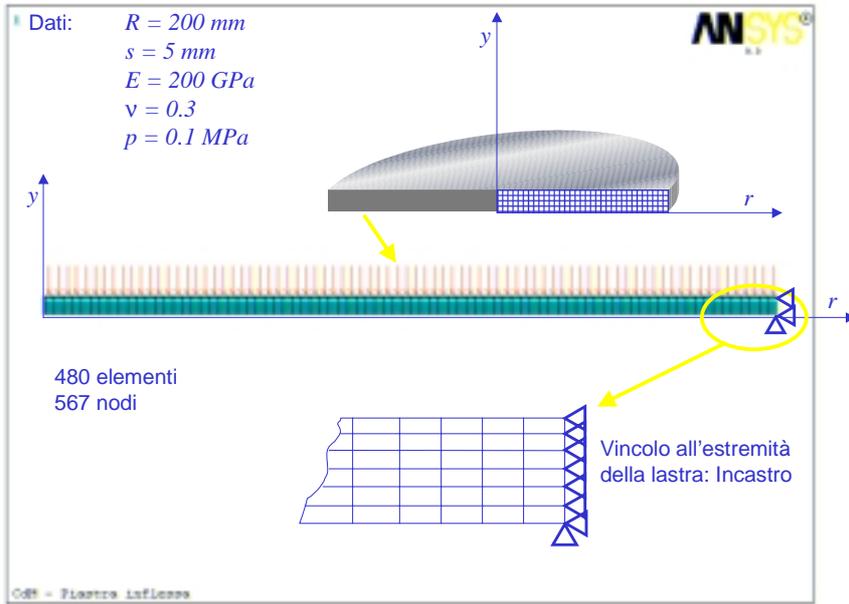
Esempio di calcolo:

Dati:  $R = 200 \text{ mm}$   $s = 5 \text{ mm}$   
 $E = 200 \text{ GPa}$   $\nu = 0.3$   
 $p = 0.1 \text{ MPa}$



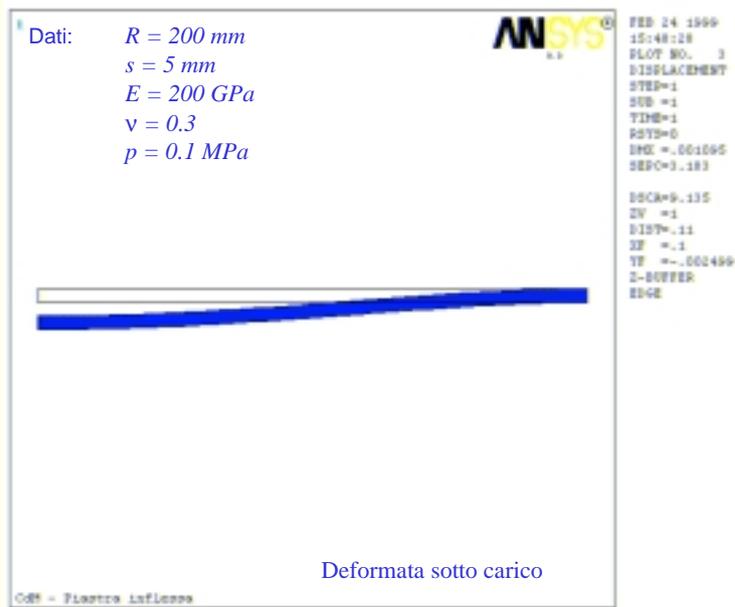
### Lastre piane circolari

Lastra incastrata al contorno: pressione uniforme  
Modello ad elementi finiti



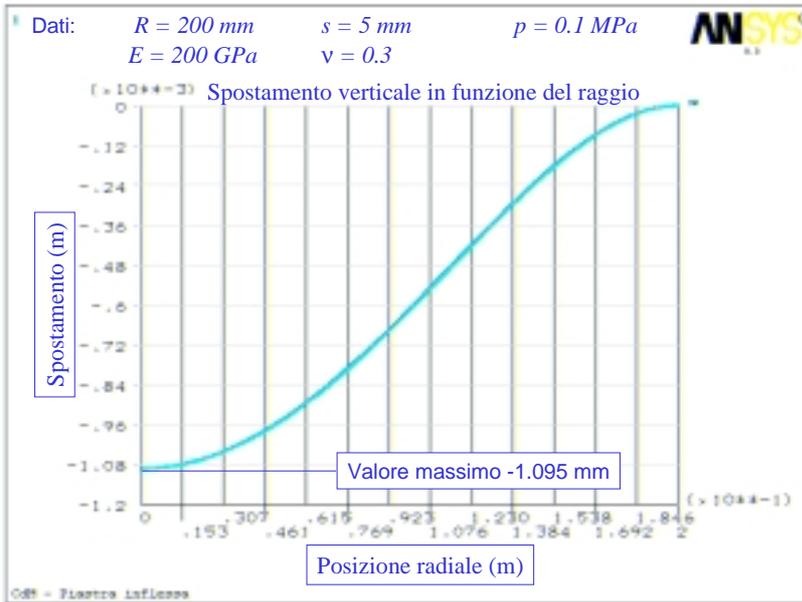
### Lastre piane circolari

Lastra appoggiata al contorno  
Modello ad elementi finiti



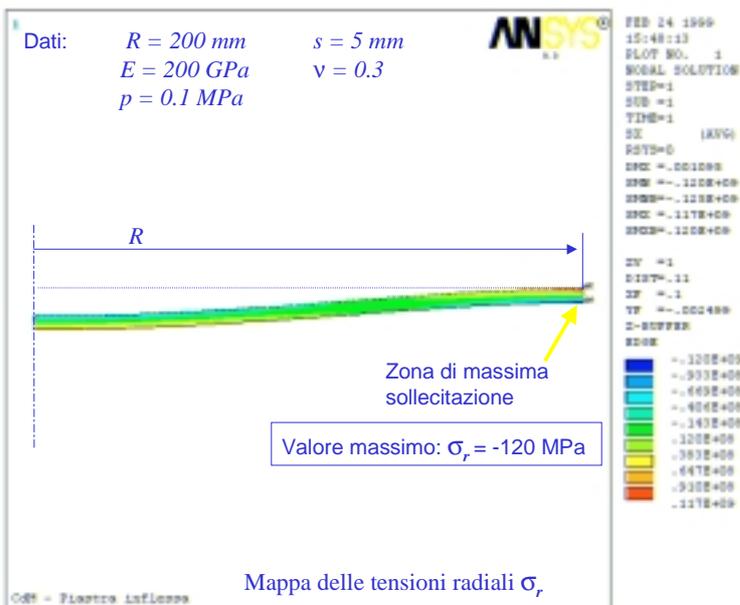
**Lastre piane circolari**

Lastra incastrata al contorno: pressione uniforme



**Lastre piane circolari**

Lastra incastrata al contorno: pressione uniforme



**Lastre piane circolari**

Lastra incastrata al contorno: pressione uniforme

Dati:  $R = 200 \text{ mm}$   $s = 5 \text{ mm}$   
 $E = 200 \text{ GPa}$   $\nu = 0.3$   
 $p = 0.1 \text{ MPa}$



Ingrandimento della zona di incastro della lastra



ODB - Elemento Influsso

**Lastre piane circolari**

Lastra incastrata al contorno: pressione uniforme

Dati:  $R = 200 \text{ mm}$   $s = 5 \text{ mm}$   
 $E = 200 \text{ GPa}$   $\nu = 0.3$   
 $p = 0.1 \text{ MPa}$



```
FEB 24 1999
15:48:21
PLOT NO. 2
GLOBAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=1
SE (AVG)
SESYS=0
SPC =.001000
SPD =.784E+08
SPM =.834E+08
SPC =.784E+08
SPM =.834E+08
ZV =1
DIST=.11
ZF =.1
ZF =.002400
Z-SUPP=
EDGE
EDGE
=.784E+08
=.632E+08
=.432E+08
=.242E+08
=.875E+07
=.868E+07
=.241E+08
=.432E+08
=.605E+08
=.784E+08
```



ODB - Elemento Influsso

Mappa delle tensioni circonferenziali  $\sigma_\theta$

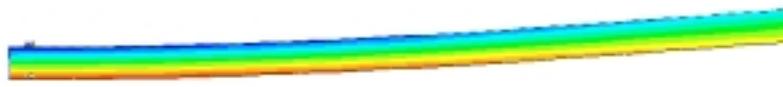
### Lastre piane circolari

Lastra incastrata al contorno: pressione uniforme

Dati:  $R = 200 \text{ mm}$   $s = 5 \text{ mm}$   
 $E = 200 \text{ GPa}$   $\nu = 0.3$   
 $p = 0.1 \text{ MPa}$

ANSYS

Ingrandimento della zona centrale della lastra



Zona di massima sollecitazione

Valore massimo:  $\sigma_{\theta} = 78 \text{ MPa}$

Mappa delle tensioni circonferenziali  $\sigma_{\theta}$

ODB - Piastre Infilasse

### Lastre piane circolari

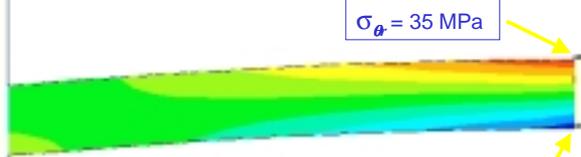
Lastra incastrata al contorno: pressione uniforme

Dati:  $R = 200 \text{ mm}$   $s = 5 \text{ mm}$   
 $E = 200 \text{ GPa}$   $\nu = 0.3$   
 $p = 0.1 \text{ MPa}$

ANSYS

FEB 25 1999  
11:34:01  
PLOT NO. 1  
LOCAL SOLUTION  
STEP=1  
SUB =1  
TIME=1  
SE (KVC)  
RSTN=0  
SHE =.159E+01  
SHE =-.393E+08  
SHE =-.444E+08  
SHE =.350E+08  
SHE =.376E+08

Ingrandimento della zona di incastro della lastra



$\sigma_{\theta} = 35 \text{ MPa}$

$\sigma_{\theta} = -39 \text{ MPa}$

ZV =1  
\*DEFT=.021609  
\*EF =.101109  
\*EF =.001606  
Z-BUFFER  
EDGE  
-.393E+08  
-.311E+08  
-.228E+08  
-.144E+08  
-.600E+07  
.198E+07  
.302E+08  
.188E+08  
.247E+08  
.302E+08

Mappa delle tensioni circonferenziali  $\sigma_{\theta}$

ODB - Piastre Infilasse

### Lastre piane circolari

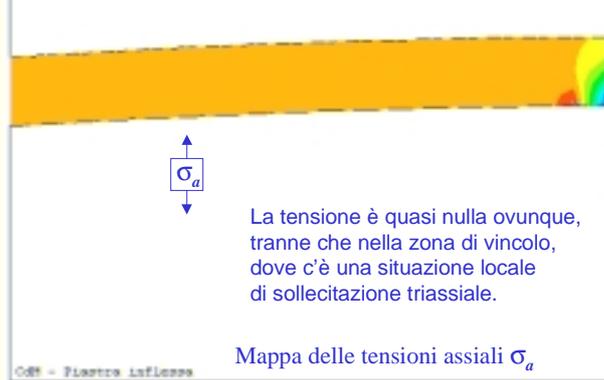
Lastra incastrata al contorno: pressione uniforme

Dati:  $R = 200 \text{ mm}$        $s = 5 \text{ mm}$   
 $E = 200 \text{ GPa}$        $\nu = 0.3$   
 $p = 0.1 \text{ MPa}$



FEB 24 1999  
 16:42:30  
 PLOT NO. 1  
 GLOBAL SOLUTION  
 STEP=1  
 SUB =1  
 TIME=1  
 ET  
 ETYS=0 (AVG)  
 ETYS=0  
 EPX =.001695  
 EPY =-.114E+08  
 EPZ =-.164E+08  
 EPX =.262E+07  
 EPZ =.774E+07

Ingrandimento della zona di incastro della lastra



La tensione è quasi nulla ovunque, tranne che nella zona di vincolo, dove c'è una situazione locale di sollecitazione triassiale.

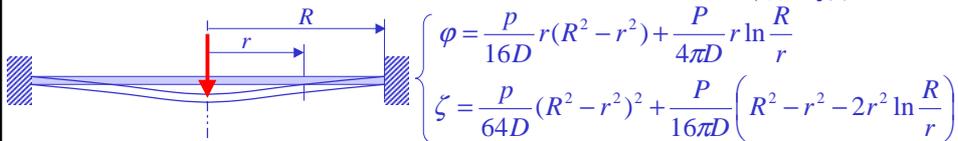
Mappe delle tensioni assiali  $\sigma_a$

ODB - Element Inflation

### Lastre piane circolari

Lastra incastrata al contorno: carico concentrato al centro

Esaminiamo ora il caso in cui agisca sulla lastra solo il carico concentrato  $P$  localizzato al centro della lastra e quindi  $p = 0$ : Ricordiamo le funzioni  $\varphi(r)$  e  $\zeta(r)$



nel caso in cui sia  $p = 0$  :  $\varphi = \frac{P}{4\pi D} r \ln \frac{R}{r}$        $\zeta = \frac{P}{16\pi D} \left( R^2 - r^2 - 2r^2 \ln \frac{R}{r} \right)$

e la derivata di  $\varphi(r)$  vale:  $\frac{d\varphi}{dr} = \frac{P}{4\pi D} \left( \ln \frac{R}{r} - 1 \right)$

I momenti flettenti, come è noto, sono dati dalle relazioni:

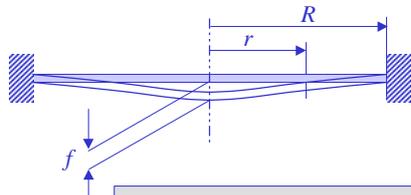
$$\left\{ \begin{aligned} m_r &= D \left( \frac{d\varphi}{dr} + \nu \frac{\varphi}{r} \right) \\ m_\theta &= D \left( \frac{\varphi}{r} + \nu \frac{d\varphi}{dr} \right) \end{aligned} \right.$$

quindi, introducendo le espressioni di  $\varphi(r)$  e  $d\varphi(r)/dr$  si ha:

$$m_r = \frac{P}{4\pi} \left[ (1+\nu) \ln \frac{R}{r} - 1 \right] \quad m_\theta = \frac{P}{4\pi} \left[ (1+\nu) \ln \frac{R}{r} - \nu \right]$$

### Lastre piane circolari

Lastra incastrata al contorno: carico concentrato al centro



Lo spostamento massimo (freccia  $f$ ) si verifica al centro della lastra:

Tenendo conto che:  $\lim_{r \rightarrow 0} \left( r^2 \ln \frac{R}{r} \right) = 0$

si ha:  $\zeta_{(r=0)} = f = \frac{PR^2}{16\pi D} = \frac{3(1-\nu^2)}{4\pi} \frac{PR^2}{Es^3}$

A parità di carico totale  $P = Q = p\pi R^2$  la freccia è quadrupla rispetto al caso di pressione uniforme

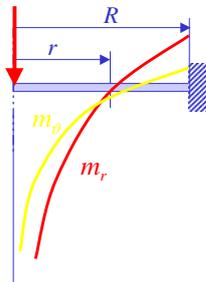
Al contorno ( $r = R$ ) si ha:  $m_r = -\frac{P}{4\pi}$        $m_\vartheta = -\nu \frac{P}{4\pi} = -\nu m_r$

Al centro ( $r = 0$ ) i momenti raggiungono valori infiniti.

Le tensioni, come sempre, sono proporzionali ai momenti:

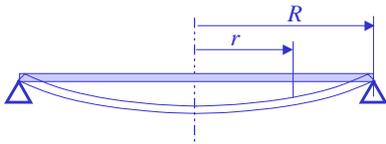
$$\sigma_r = \frac{m_r}{W} = \frac{6m_r}{s^2}$$

$$\sigma_\vartheta = \frac{m_\vartheta}{W} = \frac{6m_\vartheta}{s^2}$$



### Lastre piane circolari

Lastra appoggiata al contorno

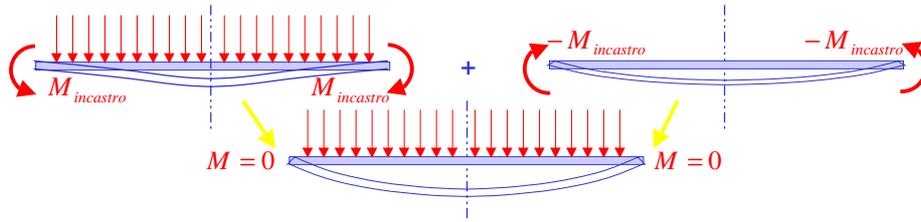


Condizioni al contorno:

- 1) per  $r = 0$  si ha  $\varphi = 0$
- 2) per  $r = R$  si ha  $m_r = 0$
- 3) per  $r = R$  si ha  $\zeta = 0$

Si può procedere come nel caso delle lastre incastrate al bordo, determinando i valori delle costanti  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  in base alle condizioni al contorno.

Tuttavia, risulta più semplice sfruttare il principio di sovrapposibilità degli effetti, valido in campo lineare elastico, sommando alla soluzione nota della lastra incastrata, la soluzione ottenuta applicando al bordo esterno della lastra un momento radiale uguale e contrario al momento d'incastro.



In tal modo si rispetta la 2° condizione al contorno,  $m_r = 0$  per  $r = R$ , mentre le altre due sono già rispettate nel caso di incastro al bordo esterno.

**Lastre piane circolari**

Lastra appoggiata al contorno

Primo caso: pressione uniforme  $p$ In questo caso il momento radiale di incastro è dato da:  $m_r = -\frac{pR^2}{8}$ quindi, il momento da applicare al bordo della lastra libera è:  $m = +\frac{pR^2}{8}$ La rotazione in funzione del raggio in una lastra, libera al bordo, alla quale è applicato un momento uniforme  $m$  è data da:

$$\varphi^* = \frac{rm}{D(1+\nu)} = \frac{rpR^2}{8D(1+\nu)}$$

La rotazione in funzione del raggio in una lastra incastrata al bordo e soggetta ad una pressione uniforme è data da:  $\varphi^{**} = \frac{p}{16D} r(R^2 - r^2)$ 

Quindi, la rotazione in funzione del raggio in una lastra appoggiata al bordo e soggetta ad una pressione uniforme è data dalla somma delle due rotazioni:

$$\varphi = \varphi^* + \varphi^{**} = \frac{pr}{16D} \left( \frac{2R^2}{(1+\nu)} + R^2 - r^2 \right) = \frac{pr}{16D} \left( \frac{3+\nu}{(1+\nu)} R^2 - r^2 \right)$$

La rotazione in corrispondenza del bordo è:  $\varphi_{(r=R)} = \frac{pR^3}{8D(1+\nu)}$ **Lastre piane circolari**

Lastra appoggiata al contorno

Pressione uniforme  $p$ Ricordando che il momento da applicare al bordo della lastra libera è:  $m = +\frac{pR^2}{8}$ Lo spostamento normale al piano in una lastra, libera al bordo, alla quale è applicato un momento uniforme  $m$  è dato da:

$$\zeta^* = \frac{m}{2D(1+\nu)} (R^2 - r^2) = \frac{pR^2}{16D(1+\nu)} (R^2 - r^2)$$

Lo spostamento normale al piano in una lastra incastrata al bordo e soggetta ad una pressione uniforme è dato da:  $\zeta^{**} = \frac{p}{64D} (R^2 - r^2)^2$ 

Quindi lo spostamento normale al piano in una lastra appoggiata al bordo e soggetta ad una pressione uniforme è dato dalla somma dei due spostamenti:

$$\zeta = \zeta^* + \zeta^{**} = \frac{pR^2}{16D(1+\nu)} (R^2 - r^2) + \frac{p}{64D} (R^2 - r^2)^2 = \frac{p}{64D} (R^2 - r^2) \left( \frac{5+\nu}{1+\nu} R^2 - r^2 \right)$$

La freccia  $f$  (spostamento normale al piano al centro) è dato da:  $\zeta_{(r=0)} = f = \frac{5+\nu}{1+\nu} \frac{pR^4}{64D}$ La freccia  $f$  è maggiore di quella ottenuta per la lastra incastrata del rapporto:

$$\frac{5+\nu}{1+\nu} \quad \text{che, per } \nu=0.3, \text{ vale circa } 4$$

### Lastre piane circolari

Lastra appoggiata al contorno

Pressione uniforme  $p$

Il momento  $m = +\frac{pR^2}{8}$  opposto al momento di incastro, che agisce lungo il contorno, provoca momenti  $m_r = m_\theta = m$  in tutti i punti della lastra.

Quindi, per ottenere la distribuzione dei momenti flettenti in funzione del raggio, nella lastra appoggiata, basta sommare il momento costante  $m$  alle funzioni calcolate per le lastre incastrate:

$$m_r = \frac{p}{16} [(1+\nu)R^2 - (3+\nu)r^2] + \frac{pR^2}{8} = \frac{p}{16} (3+\nu)(R^2 - r^2)$$

$$m_\theta = \frac{p}{16} [(1+\nu)R^2 - (1+3\nu)r^2] + \frac{pR^2}{8} = \frac{p}{16} [(3+\nu)R^2 - (1+3\nu)r^2]$$

I momenti al centro della piastra valgono:

$$m_r = m_\theta = (3+\nu)\frac{pR^2}{16} = (3+\nu)\frac{Q}{16\pi} \quad \text{avendo posto: } Q = p\pi R^2$$

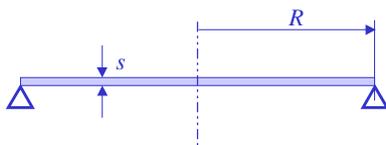
Al bordo si ha:  $m_r = 0$   $m_\theta = (1-\nu)\frac{pR^2}{8}$

La tensione massima si ha nel centro e vale:  $\sigma_{\max} = \pm \frac{3(3+\nu)}{8} \frac{pR^2}{s^2}$

### Lastre piane circolari

Lastra appoggiata al contorno

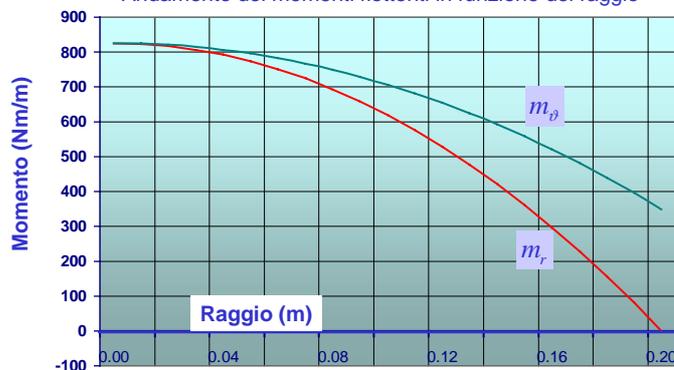
Pressione uniforme  $p$



Esempio di calcolo:

Dati:  $R = 200 \text{ mm}$   $s = 5 \text{ mm}$   
 $E = 200 \text{ GPa}$   $\nu = 0.3$   
 $p = 0.1 \text{ MPa}$

Andamento dei momenti flettenti in funzione del raggio

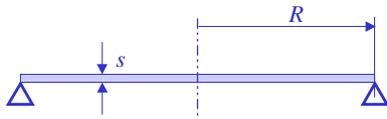


$$m_r = \frac{p}{16} (3+\nu)(R^2 - r^2) \quad m_\theta = \frac{p}{16} [(3+\nu)R^2 - (1+3\nu)r^2]$$

### Lastre piane circolari

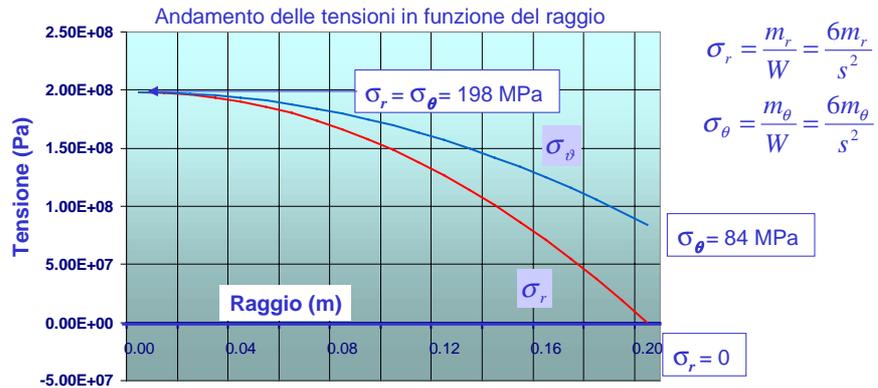
Lastra appoggiata al contorno

Pressione uniforme  $p$



Esempio di calcolo:

Dati:  $R = 200 \text{ mm}$   $s = 5 \text{ mm}$   
 $E = 200 \text{ GPa}$   $\nu = 0.3$   
 $p = 0.1 \text{ MPa}$

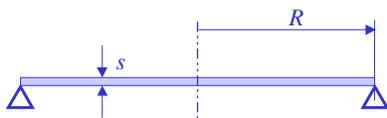


$$\sigma_r = \frac{3p}{8s^2} (3+\nu)(R^2 - r^2) \quad \sigma_\theta = \frac{3p}{8s^2} [(3+\nu)R^2 - (1+3\nu)r^2]$$

### Lastre piane circolari

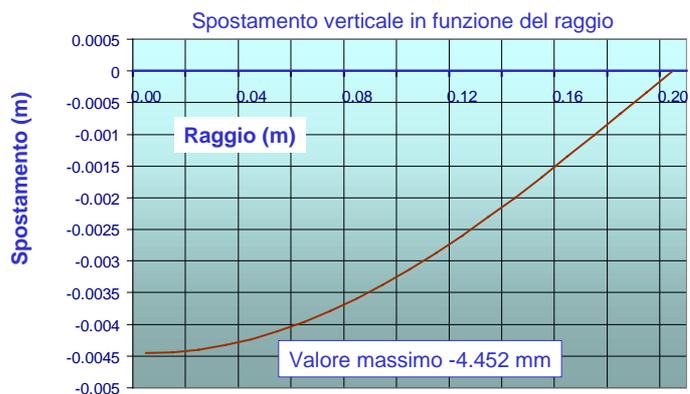
Lastra appoggiata al contorno

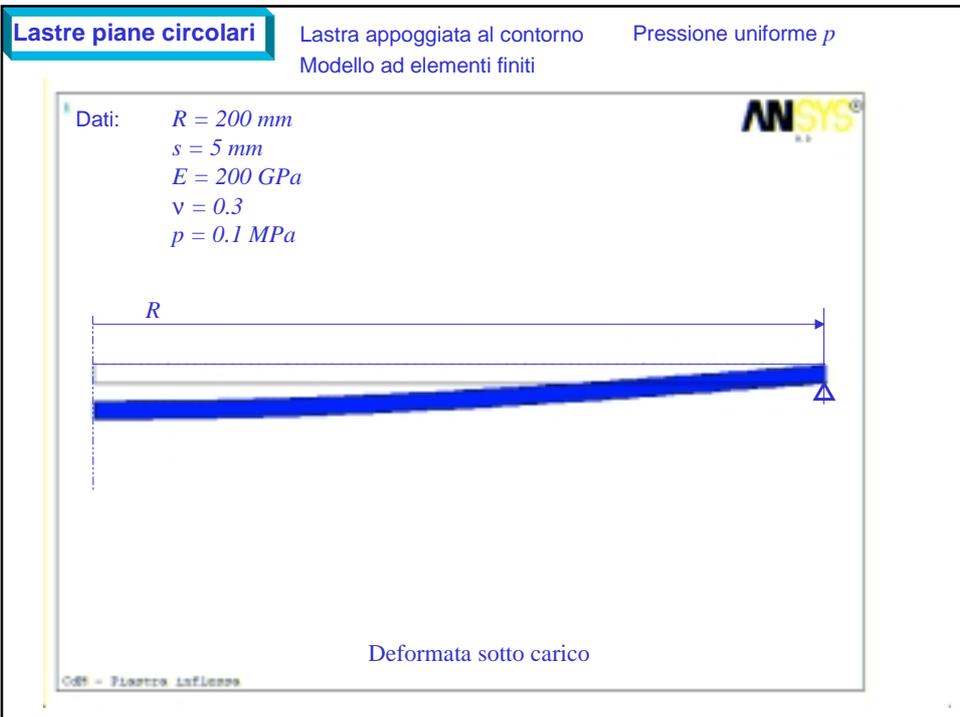
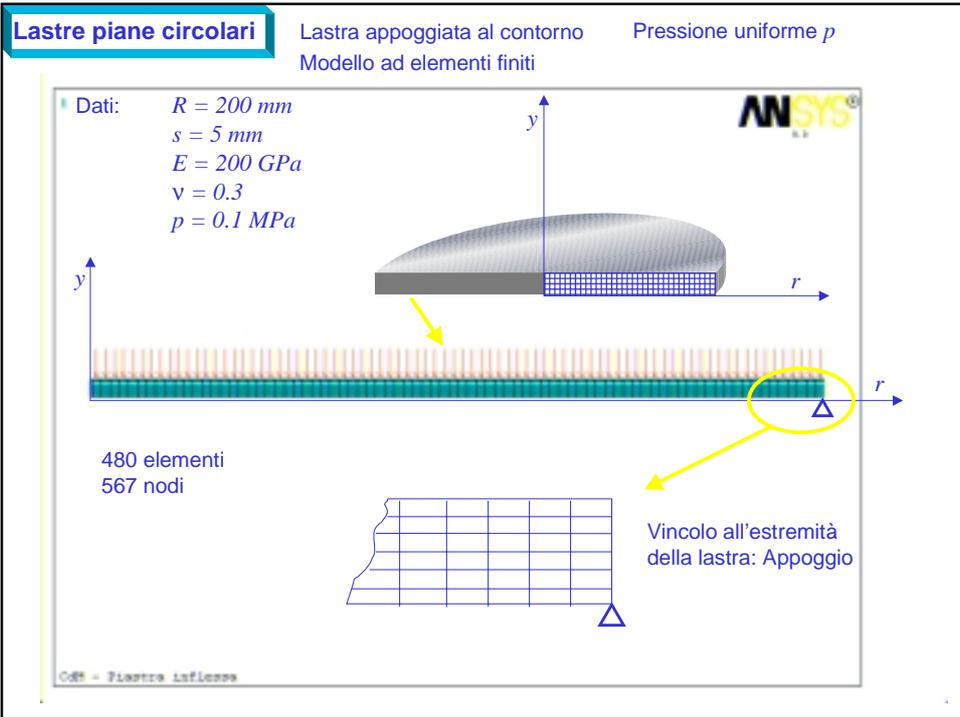
Pressione uniforme  $p$



Esempio di calcolo:

Dati:  $R = 200 \text{ mm}$   $s = 5 \text{ mm}$   
 $E = 200 \text{ GPa}$   $\nu = 0.3$   
 $p = 0.1 \text{ MPa}$

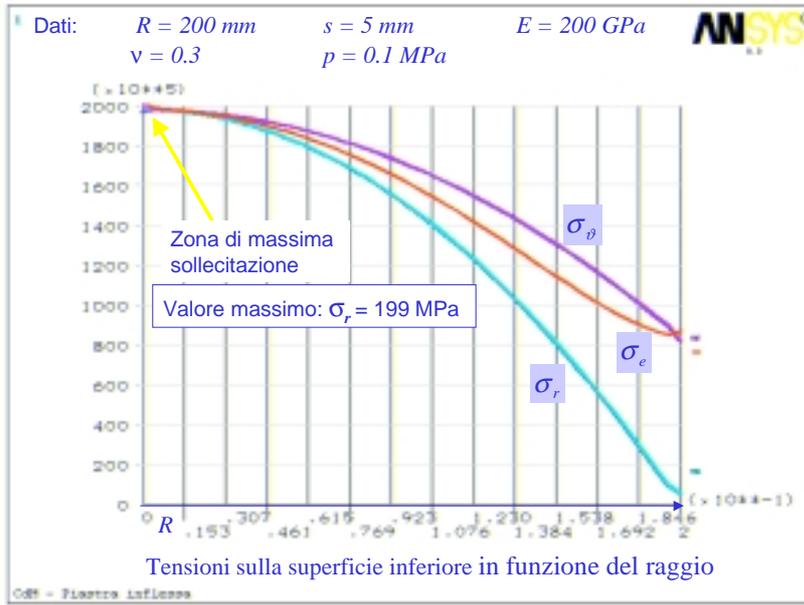




**Lastre piane circolari**

Lastra appoggiata al contorno

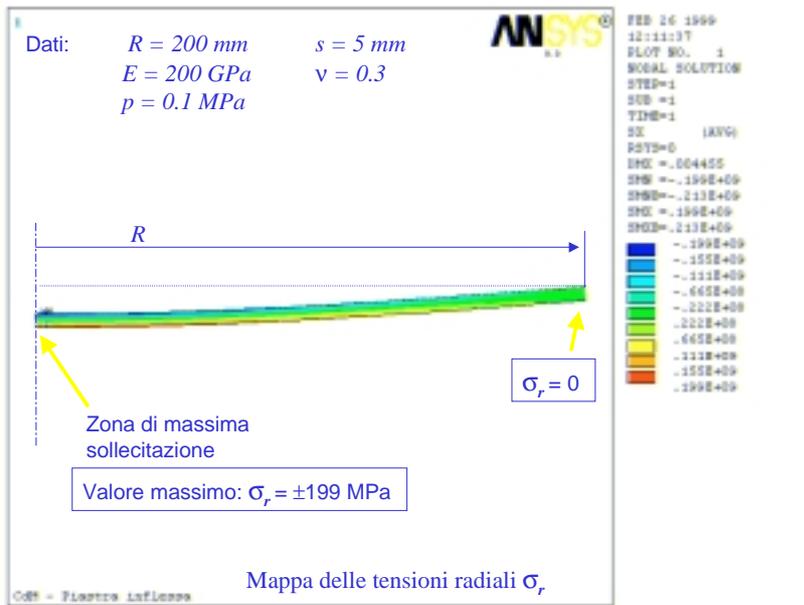
Pressione uniforme  $p$



**Lastre piane circolari**

Lastra appoggiata al contorno

Pressione uniforme  $p$



**Lastre piane circolari**

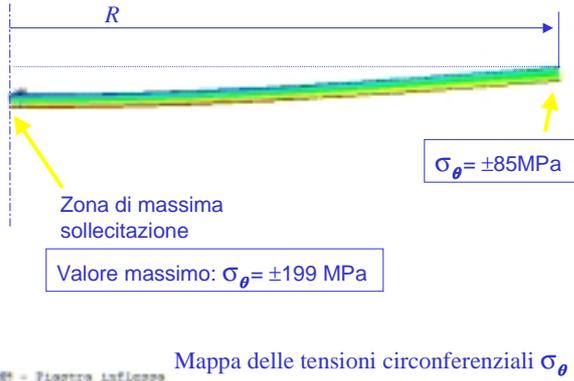
Lastra appoggiata al contorno

Pressione uniforme  $p$

Dati:  $R = 200\text{ mm}$      $s = 5\text{ mm}$   
 $E = 200\text{ GPa}$      $\nu = 0.3$   
 $p = 0.1\text{ MPa}$



FEB 26 1999  
12:11:46  
PLOT NO. 2  
GLOBAL SOLUTION  
STEP=1  
SUB =1  
TIME=1  
SE (AVG)  
PSYS=0  
SFE =.004455  
SFM =-.199E+09  
SFO =-.212E+09  
SFP =-.199E+09  
SFS =.212E+09  
SFD =.199E+09  
SFE =.199E+09  
SFM =-.155E+09  
SFO =-.111E+09  
SFP =-.663E+09  
SFS =.221E+09  
SFD =.663E+09  
SFE =.111E+09  
SFM =-.155E+09  
SFO =-.199E+09



ODB - Piastre Inflesse

Mappa delle tensioni circonferenziali  $\sigma_{\theta}$

**Lastre piane circolari**

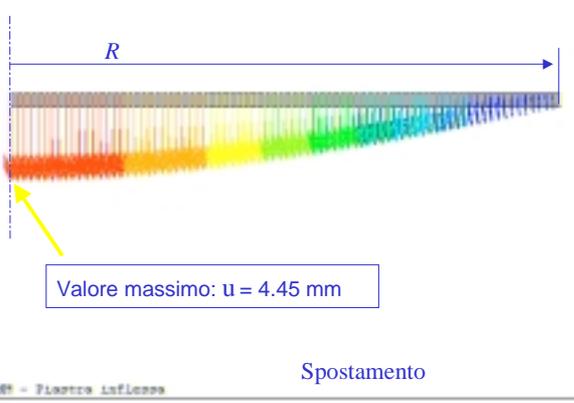
Lastra appoggiata al contorno

Pressione uniforme  $p$

Dati:  $R = 200\text{ mm}$      $s = 5\text{ mm}$   
 $E = 200\text{ GPa}$      $\nu = 0.3$   
 $p = 0.1\text{ MPa}$



FEB 26 1999  
12:12:15  
PLOT NO. 4  
VECTOR  
STEP=1  
SUB =1  
TIME=1  
U  
NODE=170  
HIM=.277E-06  
HMX=.004455  
  
.277E-06  
.557E-09  
.88111E  
.881671  
.002218  
.002785  
.003342  
.003899  
.004455



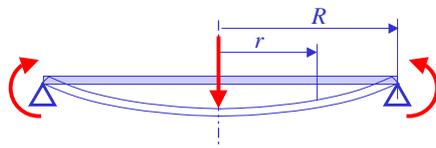
ODB - Piastre Inflesse

Spostamento

### Lastre piane circolari

Lastra appoggiata al contorno: carico concentrato al centro

Esaminiamo ora il caso in cui agisca sulla lastra solo il carico concentrato  $P$ , agendo in modo analogo a quanto si è fatto nel caso di pressione uniforme.



Nel caso di lastra incastrata e soggetta al carico concentrato  $P$  è stata ottenuta, in corrispondenza del bordo ( $r = R$ ), la soluzione :

$$m_r = -\frac{P}{4\pi} \quad m_\vartheta = -\nu \frac{P}{4\pi} = -\nu m_r$$

Perché sia nullo il momento radiale al bordo, come deve essere in corrispondenza dell'appoggio, è necessario aggiungere un valore uguale ed opposto:  $\rightarrow m = \frac{P}{4\pi}$

La rotazione può quindi essere calcolata come somma dei due contributi  $\varphi^*$  e  $\varphi^{**}$  dovuti, rispettivamente, al momento  $m$  ed alla soluzione con incastro:

$$\varphi^* = \frac{rm}{D(1+\nu)} = \frac{rP}{4\pi D(1+\nu)} \quad \text{e} \quad \varphi^{**} = \frac{P}{4\pi D} r \ln \frac{R}{r}$$

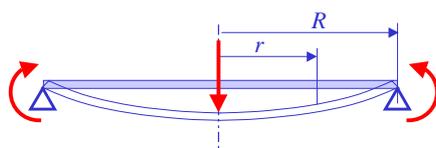
$$\text{da cui si ottiene:} \quad \varphi^* + \varphi^{**} = \varphi = \frac{P}{4\pi D} r \left( \ln \frac{R}{r} + \frac{1}{1+\nu} \right)$$

$$\text{La rotazione al bordo vale:} \quad \varphi_{(r=R)} = \frac{PR}{4\pi D(1+\nu)}$$

### Lastre piane circolari

Lastra appoggiata al contorno: carico concentrato al centro

Esaminiamo ora il caso in cui agisca sulla lastra solo il carico concentrato  $P$ , agendo in modo analogo a quanto si è fatto nel caso di pressione uniforme.



Nel caso di lastra incastrata e soggetta al carico concentrato  $P$  è stata ottenuta, in corrispondenza del bordo ( $r = R$ ), la soluzione :

$$m_r = -\frac{P}{4\pi} \quad m_\vartheta = -\nu \frac{P}{4\pi} = -\nu m_r$$

Perché sia nullo il momento radiale al bordo, come deve essere in corrispondenza dell'appoggio, è necessario aggiungere un valore uguale ed opposto:  $\rightarrow m = \frac{P}{4\pi}$

In modo analogo si procede per lo spostamento, sommando i due contributi  $\zeta^*$  e  $\zeta^{**}$  dovuti, rispettivamente, al momento  $m$  ed alla soluzione con incastro:

$$\zeta^* = \frac{m}{2D(1+\nu)} (R^2 - r^2) = \frac{P}{8\pi D(1+\nu)} (R^2 - r^2) \quad \text{e} \quad \zeta^{**} = \frac{P}{16\pi D} (R^2 - r^2 - 2r^2 \ln \frac{R}{r})^2$$

$$\text{da cui si ottiene:} \quad \zeta^* + \zeta^{**} = \zeta = \frac{P}{16\pi D} \left[ \frac{3+\nu}{1+\nu} (R^2 - r^2) - 2r^2 \ln \frac{R}{r} \right]$$

$$\text{Lo spostamento al centro vale:} \quad \zeta_{(r=0)} = \frac{3+\nu}{1+\nu} \frac{PR^2}{16\pi D}$$

### Lastre piane circolari

Lastra appoggiata al contorno: carico concentrato al centro

Il momento  $m = \frac{P}{4\pi}$  provoca momenti  $m_r = m_\theta = m$  in tutti i punti della lastra.

Quindi, per ottenere la distribuzione dei momenti flettenti in funzione del raggio, nella lastra appoggiata, basta sommare il momento costante  $m$  alle funzioni calcolate per le lastre incastrate, nella condizione di carico concentrato:

$$m_r = \frac{P}{4\pi} \left[ (1+\nu) \ln \frac{R}{r} - 1 \right] + \frac{P}{4\pi} = (1+\nu) \frac{P}{4\pi} \ln \frac{R}{r}$$
$$m_\theta = \frac{P}{4\pi} \left[ (1+\nu) \ln \frac{R}{r} - \nu \right] + \frac{P}{4\pi} = \frac{P}{4\pi} \left[ (1+\nu) \ln \frac{R}{r} + (1-\nu) \right]$$

I momenti al bordo della piastra valgono:

$$m_r = 0 \quad m_\theta = (1-\nu) \frac{P}{4\pi}$$

I momenti al centro della piastra risultano infiniti, come si è già visto per le lastre incastrate.

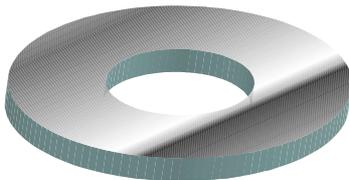
Le tensioni, come sempre, sono legate ai momenti dalle relazioni:

$$\sigma_r = \frac{m_r}{W} = \frac{6m_r}{s^2}$$
$$\sigma_\theta = \frac{m_\theta}{W} = \frac{6m_\theta}{s^2}$$

### Lastre piane circolari

Lastra di forma anulare

È interessante studiare il caso in cui la lastra sia di forma anulare, vincolata in modo qualsiasi in corrispondenza di entrambi i bordi.



La soluzione generale è data ancora dalle relazioni ricavate in precedenza per le lastre circolari.

$$\varphi = -\frac{pr^3}{16D} - \frac{Pr}{8\pi D} (2 \ln r - 1) + C_1 \frac{r}{2} + \frac{C_2}{r}$$

$$\zeta = \frac{pr^4}{64D} + \frac{Pr^2}{8\pi D} (2 \ln r - 1) - C_1 \frac{r^2}{4} + C_2 \ln r + C_3$$

e la derivata  $d\varphi/dr$  che vale:

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{3pr^2}{16D} - \frac{P}{8\pi D} (2 \ln r - 1) - \frac{P}{4\pi D} + \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{r^2}$$

Se è vincolato un solo bordo della lastra, sono incognite le costanti  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$ ; se sono vincolati entrambi i bordi ci sono ulteriori incognite, legate alle reazioni al bordo interno.

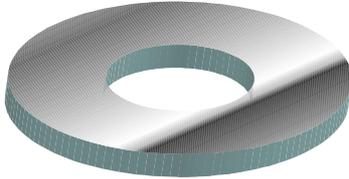
Le costanti incognite si determinano tramite le condizioni ai bordi, che si possono imporre sulla rotazioni  $\varphi$ , sullo spostamento  $\zeta$  e sul momento radiale  $m_r$ , che, come è noto, è legato alla rotazione  $\varphi$  ed alla sua derivata  $d\varphi/dr$ :

$$m_r = D \left( \frac{d\varphi}{dr} + \nu \frac{\varphi}{r} \right)$$

### Lastre piane circolari

Lastra di forma anulare

È interessante studiare il caso in cui la lastra sia di forma anulare, vincolata in modo qualsiasi in corrispondenza di entrambi i bordi.



La soluzione generale è data ancora dalle relazioni ricavate in precedenza per le lastre circolari.

$$\varphi = -\frac{pr^3}{16D} - \frac{Pr}{8\pi D}(2\ln r - 1) + C_1 \frac{r}{2} + \frac{C_2}{r}$$

$$\zeta = \frac{pr^4}{64D} + \frac{Pr^2}{8\pi D}(2\ln r - 1) - C_1 \frac{r^2}{4} + C_2 \ln r + C_3$$

e la derivata  $d\varphi/dr$  che vale:

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{3pr^2}{16D} - \frac{P}{8\pi D}(2\ln r - 1) - \frac{P}{4\pi D} + \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{r^2}$$

Introducendo i valori di  $\varphi$  e di  $d\varphi/dr$  nell'espressione di  $m_r$ , si ottiene:  $m_r = D \left( \frac{d\varphi}{dr} + \nu \frac{\varphi}{r} \right) =$

$$= D \left[ -\frac{3pr^2}{16D} - \frac{Pr}{8\pi D}(2\ln r - 1) - \frac{P}{4\pi D} + \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{r^2} + \nu \left( -\frac{pr^3}{16D} - \frac{P}{8\pi D}(2\ln r - 1) + \frac{C_1 r}{2} + \frac{C_2}{r} \right) \right]$$

e dunque:

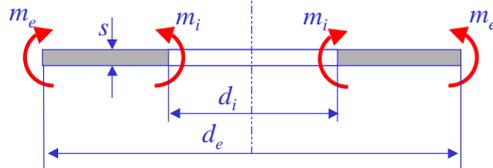
$$m_r = -(3+\nu) \frac{pr^2}{16} - (1+\nu) \frac{P}{4\pi} \ln r - (1-\nu) \frac{P}{8\pi} + D(1+\nu) \frac{C_1}{2} - D(1-\nu) \frac{C_2}{r^2}$$

### Lastre piane circolari

Lastra di forma anulare

Casi particolari:

due coppie agenti lungo i bordi



Condizioni al contorno:

- 1) per  $r = R_e$  si ha:  $m_r = m_e$
  - 2) per  $r = R_i$  si ha:  $m_r = m_i$
- inoltre  $p = 0$  e  $P = 0$

Imponendo le condizioni sui momenti applicati ai bordi e tenendo conto che i carichi, distribuiti o concentrati, sono nulli si ha:

$$m_r = -(3+\nu) \frac{pr^2}{16} - (1+\nu) \frac{P}{4\pi} \ln r - (1-\nu) \frac{P}{8\pi} + D(1+\nu) \frac{C_1}{2} - D(1-\nu) \frac{C_2}{r^2} =$$

$$= D(1+\nu) \frac{C_1}{2} - D(1-\nu) \frac{C_2}{r^2}$$

quindi:  $D(1+\nu) \frac{C_1}{2} - D(1-\nu) \frac{C_2}{R_e^2} = m_e$  e  $D(1+\nu) \frac{C_1}{2} - D(1-\nu) \frac{C_2}{R_i^2} = m_i$

da cui si ricavano le costanti:  $C_1 = \frac{2(m_e R_e^2 - m_i R_i^2)}{(1+\nu)D(R_e^2 - R_i^2)}$  e  $C_2 = \frac{(m_e - m_i)R_e^2 R_i^2}{(1-\nu)D(R_e^2 - R_i^2)}$

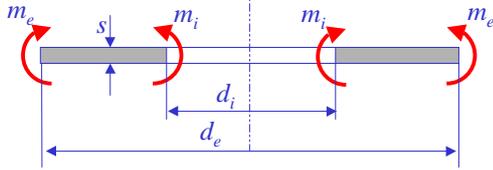
note le costanti, si può ricavare il momento radiale in funzione del raggio

$$m_r(r) = \frac{(m_e R_e^2 - m_i R_i^2)}{(R_e^2 - R_i^2)} - \frac{(m_e - m_i)R_e^2 R_i^2}{r^2 (R_e^2 - R_i^2)}$$

### Lastre piane circolari

Lastra di forma anulare

Coppie agenti lungo i bordi



Condizioni al contorno:

- 1) per  $r = R_e$  si ha:  $m_r = m_e$
  - 2) per  $r = R_i$  si ha:  $m_r = m_i$
- inoltre  $p = 0$  e  $P = 0$

e ancora si può calcolare la rotazione in funzione di  $r$ :

$$\varphi(r) = \frac{(m_e R_e^2 - m_i R_i^2) r}{(1+\nu) D (R_e^2 - R_i^2)} + \frac{(m_e - m_i) R_e^2 R_i^2}{(1-\nu) D (R_e^2 - R_i^2)} \frac{1}{r}$$

in corrispondenza dei bordi le rotazioni valgono:

$$\begin{cases} \varphi_e = \frac{m_e R_e [(1-\nu) R_e^2 + (1+\nu) R_i^2] - 2m_i R_i^2 R_e}{(1+\nu^2) D (R_e^2 - R_i^2)} \\ \varphi_i = \frac{2m_e R_e^2 R_i - m_i R_i [(1-\nu) R_i^2 + (1+\nu) R_e^2]}{(1+\nu^2) D (R_e^2 - R_i^2)} \end{cases}$$

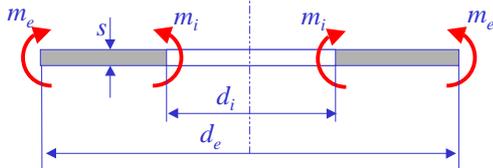
Per calcolare, infine, anche il momento circonferenziale:  $m_\vartheta = D \left( \frac{\varphi}{r} + \nu \frac{d\varphi}{dr} \right)$

è necessario ricavare la derivata:  $\frac{d\varphi}{dr} = \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{r^2}$  da cui, sostituendo i valori delle costanti:

### Lastre piane circolari

Lastra di forma anulare

Coppie agenti lungo i bordi



Condizioni al contorno:

- 1) per  $r = R_e$  si ha:  $m_r = m_e$
  - 2) per  $r = R_i$  si ha:  $m_r = m_i$
- inoltre  $p = 0$  e  $P = 0$

si ottiene:

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{(m_e R_e^2 - m_i R_i^2)}{(1+\nu) D (R_e^2 - R_i^2)} - \frac{(m_e - m_i) R_e^2 R_i^2}{(1-\nu) D (R_e^2 - R_i^2)} \frac{1}{r^2}$$

e quindi:  $m_\vartheta = D \left( \frac{\varphi}{r} + \nu \frac{d\varphi}{dr} \right) =$

$$= \frac{(m_e R_e^2 - m_i R_i^2)}{(1+\nu) D (R_e^2 - R_i^2)} + \frac{(m_e - m_i) R_e^2 R_i^2}{(1-\nu) D (R_e^2 - R_i^2)} \frac{1}{r^2} + \nu \frac{(m_e R_e^2 - m_i R_i^2)}{(1+\nu) D (R_e^2 - R_i^2)} - \frac{(m_e - m_i) R_e^2 R_i^2}{(1-\nu) D (R_e^2 - R_i^2)} \frac{\nu}{r^2}$$

scrivendo in forma più compatta si ha:  $m_\vartheta = \frac{(m_e R_e^2 - m_i R_i^2)}{(R_e^2 - R_i^2)} + \frac{(m_e - m_i) R_e^2 R_i^2}{r^2 (R_e^2 - R_i^2)}$

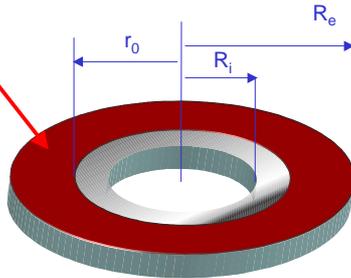
**Lastre piane circolari**

Lastra di forma anulare

Alcuni esempi di calcolo applicato a soluzioni di casi particolari

1° caso: Lastra di forma anulare con pressione uniforme agente su una corona circolare

Area sulla quale agisce la pressione  $p$



**Lastre piane circolari**

Lastra di forma anulare con pressione uniforme agente su una corona circolare

Condizione di vincolo:  
esterno appoggiato  
interno libero

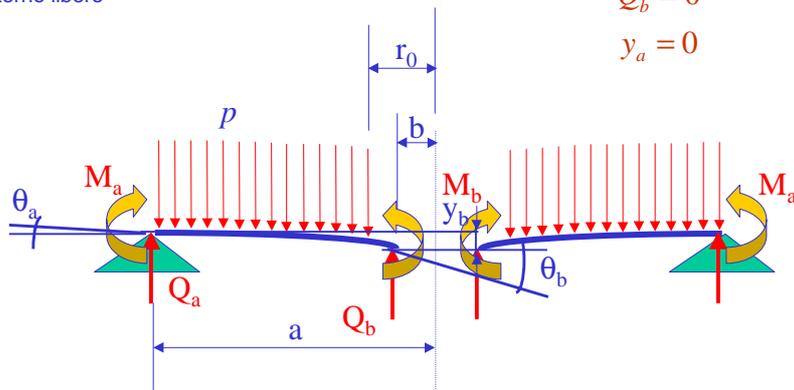
Condizioni al contorno:

$$M_{rb} = 0$$

$$M_{ra} = 0$$

$$Q_b = 0$$

$$y_a = 0$$



**Lastre piane circolari**

Lastra di forma anulare con pressione uniforme agente su una corona circolare

Spostamento in funzione del raggio:

$$y = y_b + \theta_b r \left[ \frac{1+\nu}{2} \frac{b}{r} \ln \frac{r}{b} + \frac{1-\nu}{4} \left( \frac{r-b}{b} \right) \right] - q \frac{r^4}{D} \left\{ \frac{1}{64} \left[ 1 + 4 \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 - 5 \left( \frac{r_0}{r} \right)^4 - 4 \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 \right] \left[ 2 + \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 \right] \ln \left( \frac{r}{r_0} \right) \right\}$$

dove

$$y_b = \frac{-qa^4}{D} \left\{ \frac{\left[ \frac{1+\nu}{2} \frac{b}{a} \ln \left( \frac{a}{b} \right) + \frac{1-\nu}{4} \left( \frac{a-b}{b} \right) \right] \left[ \frac{1}{4} \left\{ 1 - \frac{1-\nu}{4} \left[ 1 - \left( \frac{r_0}{a} \right)^4 \right] - \left( \frac{r_0}{a} \right)^2 \right\} \left[ 1 + (1+\nu) \ln \frac{a}{r_0} \right] \right]}{\frac{1}{2} (1-\nu^2) \left( \frac{a-b}{b} \right)} \right. \\ \left. - \frac{qa^2}{D} \frac{1}{64} \left\{ 1 + 4 \left( \frac{r_0}{a} \right)^2 - 5 \left( \frac{r_0}{a} \right)^4 - 4 \left( \frac{r_0}{a} \right)^2 \right\} \left[ 2 + \left( \frac{r_0}{a} \right)^2 \right] \ln \frac{a}{r_0} \right\}$$

e

$$\theta_b = \frac{qa^3}{\frac{1}{2} (1-\nu^2) \left( \frac{a-b}{b} \right) D} \left[ \frac{1}{4} \left\{ 1 - \frac{1-\nu}{4} \left[ 1 - \left( \frac{r_0}{a} \right)^4 \right] - \left( \frac{r_0}{a} \right)^2 \right\} \left[ 1 + (1+\nu) \ln \frac{a}{r_0} \right] \right]$$

**Lastre piane circolari**

Lastra di forma anulare con pressione uniforme agente su una corona circolare

Rotazione in funzione del raggio:

$$\theta = \theta_b \left( \frac{1}{2} \left[ (1+\nu) \frac{b}{r} + (1-\nu) \frac{r}{b} \right] \right) - \frac{qr^3}{D} \frac{1}{16} \left[ 1 - \left( \frac{r_0}{r} \right)^4 - 4 \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 \right] \ln \left( \frac{r}{r_0} \right)$$

Momento radiale per unità di lunghezza in funzione del raggio:

$$M_r = \theta_b \frac{D}{2r} (1-\nu^2) \left( \frac{r-b}{b} \right) - qr^2 \frac{1}{4} \left\{ 1 - \frac{1-\nu}{4} \left[ 1 - \left( \frac{r_0}{r} \right)^4 \right] - \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 \right\} \left[ 1 + (1+\nu) \ln \left( \frac{r}{r_0} \right) \right]$$

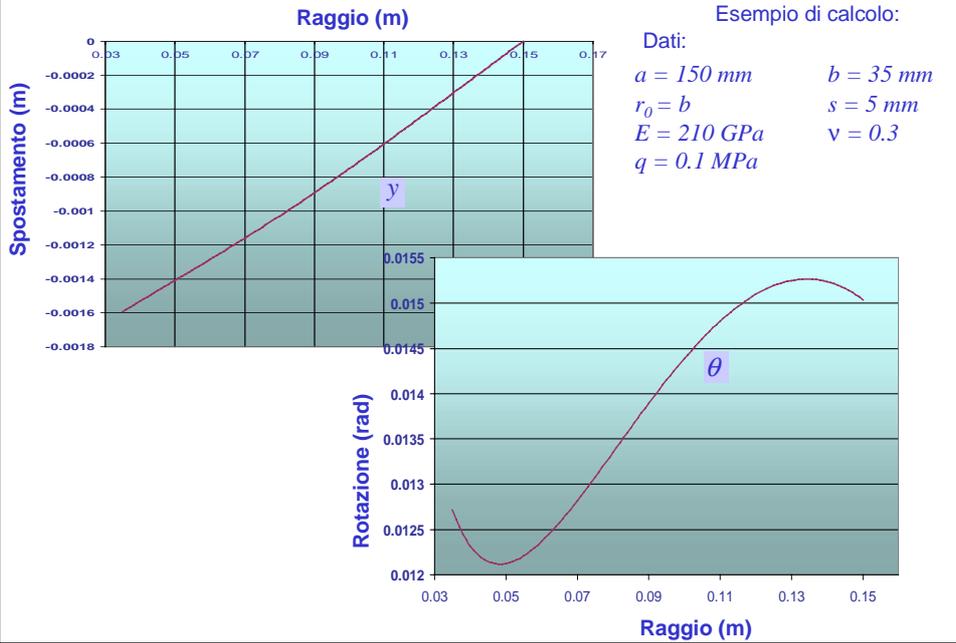
Momento circonferenziale per unità di lunghezza in funzione del raggio:

$$M_\theta = \frac{\theta D (1-\nu^2)}{r} + \nu M_r$$

Taglio per unità di lunghezza in funzione del raggio:

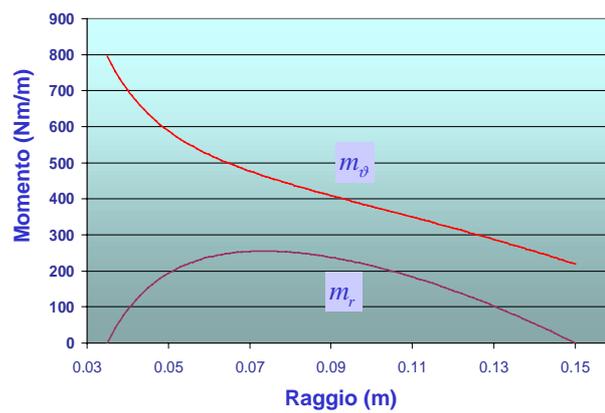
$$Q = -\frac{q}{2r} (r - r_0^2)$$

Lastra di forma anulare con pressione uniforme agente su una corona circolare  
 Andamento dello spostamento e della rotazione in funzione del raggio



Lastra di forma anulare con pressione uniforme agente su una corona circolare

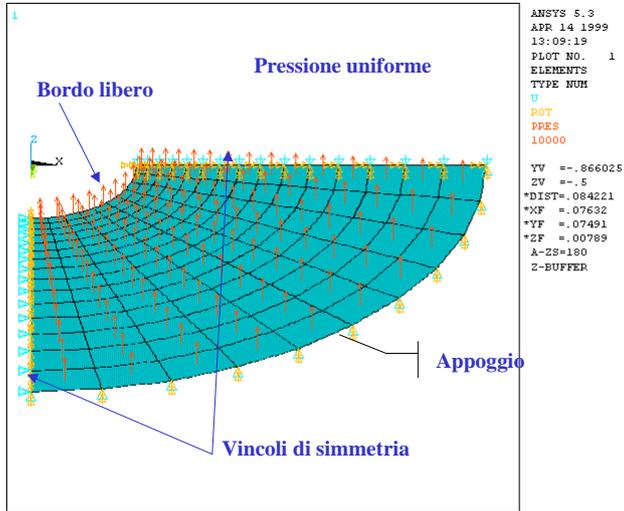
Andamento dei momenti flettenti in funzione del raggio



Lastra di forma anulare con pressione uniforme agente su una corona circolare

Dati:  $a = 150 \text{ mm}$      $b = 35 \text{ mm}$      $r_0 = b$      $s = 5 \text{ mm}$   
 $E = 210 \text{ GPa}$      $\nu = 0.3$      $q = 0.1 \text{ MPa}$

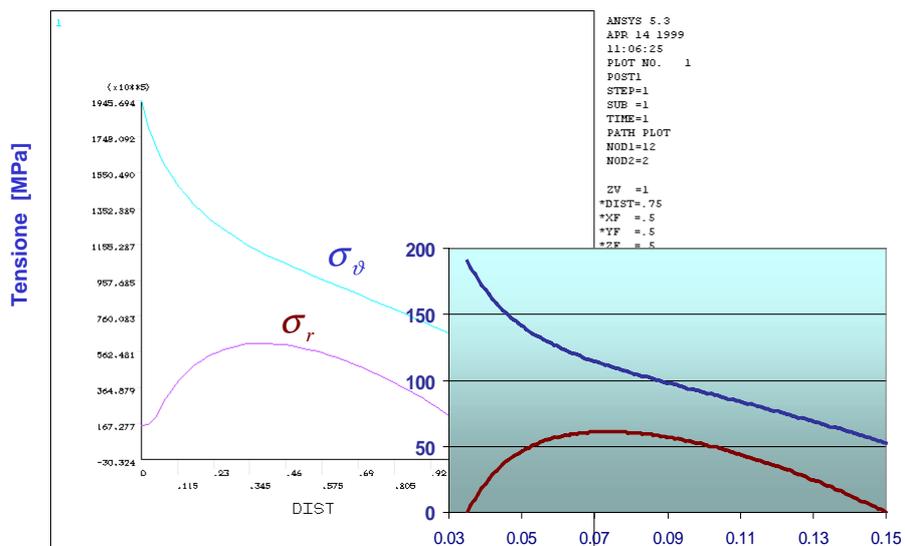
Modello ad elementi finiti:



Lastra di forma anulare con pressione uniforme agente su una corona circolare

Dati:  $a = 150 \text{ mm}$      $b = 35 \text{ mm}$      $r_0 = b$      $s = 5 \text{ mm}$   
 $E = 210 \text{ GPa}$      $\nu = 0.3$      $q = 0.1 \text{ MPa}$

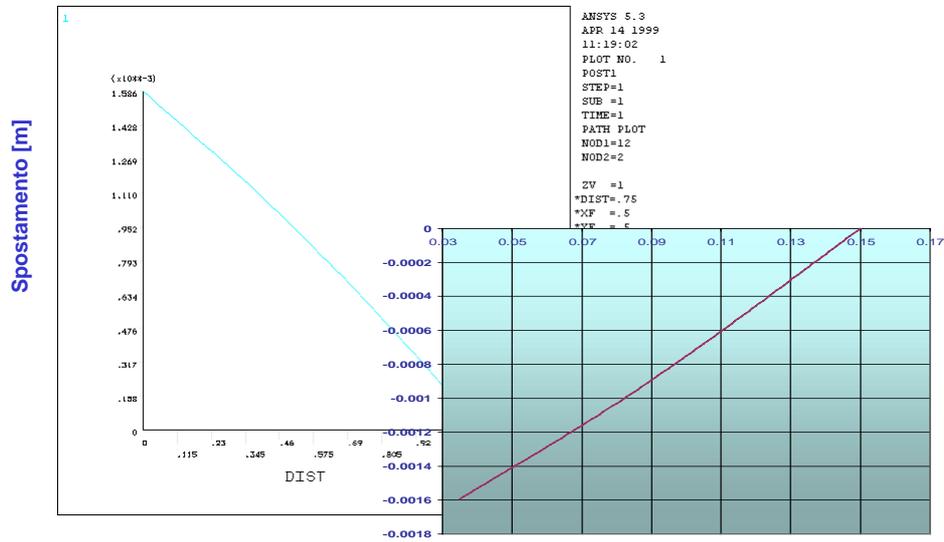
Confronto con il modello ad elementi finiti:



Lastra di forma anulare con pressione uniforme agente su una corona circolare

Dati:  $a = 150 \text{ mm}$      $b = 35 \text{ mm}$      $r_0 = b$      $s = 5 \text{ mm}$   
 $E = 210 \text{ GPa}$      $\nu = 0.3$      $q = 0.1 \text{ MPa}$

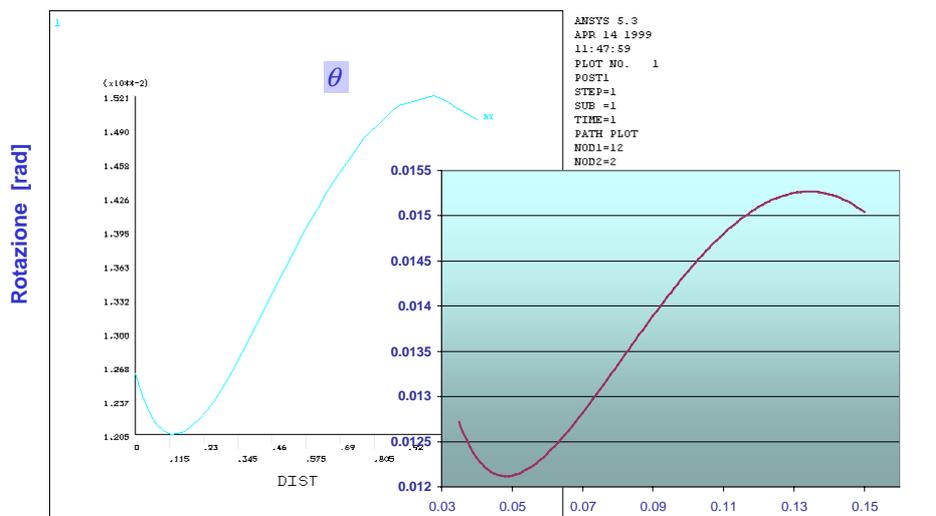
Spostamento assiale in funzione del raggio



Lastra di forma anulare con pressione uniforme agente su una corona circolare

Dati:  $a = 150 \text{ mm}$      $b = 35 \text{ mm}$      $r_0 = b$      $s = 5 \text{ mm}$   
 $E = 210 \text{ GPa}$      $\nu = 0.3$      $q = 0.1 \text{ MPa}$

Rotazione in funzione del raggio

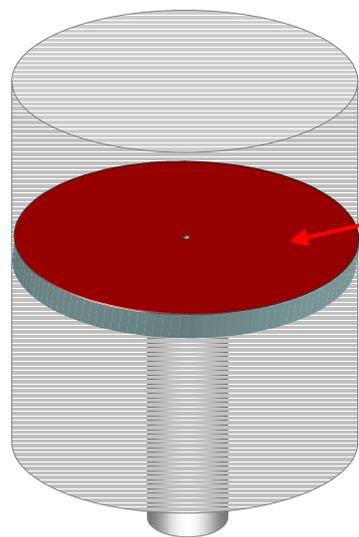


**Lastre piane circolari**

Lastra di forma anulare

Alcuni esempi di calcolo applicato a soluzioni di casi particolari

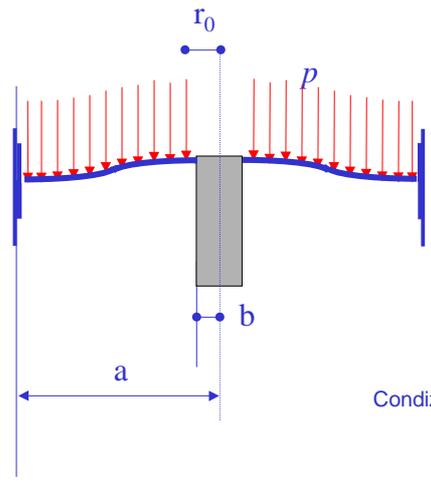
2° caso:  
Pistone di un attatore idraulico:  
lastra di forma anulare soggetta a pressione uniforme con incastro al centro e rotazioni impedito all'esterno



Pressione uniforme

**Lastre piane circolari**

Applicazione:  
pistone di un attatore idraulico



Condizione di vincolo:  
incastro interno  
guida esterna

Condizioni al contorno:

$$Q_a = 0$$

$$y_b = 0$$

$$\theta_a = 0$$

$$\theta_b = 0$$

**Lastre piane circolari**

Applicazione: pistone di un attuatore idraulico

Spostamento in funzione del raggio:

$$y = M_{rb} \frac{r^2}{4D} \left[ 1 - \left( \frac{b}{r} \right)^2 \left( 1 + 2 \ln \left( \frac{r}{b} \right) \right) \right] +$$

$$+ Q_b \frac{r^3}{4D} \frac{b}{r} \left\{ \left[ \left( \frac{b}{r} \right)^2 + 1 \right] \ln \left( \frac{r}{b} \right) + \left( \frac{b}{r} \right)^2 - 1 \right\}$$

$$- \frac{qr^4}{64D} \left\{ 1 + 4 \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 - 5 \left( \frac{r_0}{r} \right)^4 - 4 \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 \left[ 2 + \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 \right] \ln \left( \frac{r}{r_0} \right) \right\}$$

dove

$$M_{rb} = \frac{-qa^2}{\frac{1}{2} \left[ 1 - \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right]} \left\{ \frac{b}{4a} \frac{\left[ \left( \frac{b}{a} \right)^2 - 1 + 2 \ln \left( \frac{a}{b} \right) \right]}{2ab} (a^2 - r_0^2) - \frac{1}{16} \left[ 1 - \left( \frac{r_0}{a} \right)^4 - 4 \left( \frac{r_0}{a} \right)^2 \ln \left( \frac{a}{r_0} \right) \right] \right\}$$

$$Q_b = \frac{q}{2b} (a^2 - r_0^2)$$

**Lastre piane circolari**

Applicazione: pistone di un attuatore idraulico

Rotazione in funzione del raggio:

$$\theta = M_{rb} \frac{r}{2D} \left[ 1 - \left( \frac{b}{r} \right)^2 \right] + Q_b \frac{rb}{4D} \left[ \left( \frac{b}{r} \right)^2 - 1 + 2 \ln \left( \frac{r}{b} \right) \right] - \frac{qr^3}{D} \frac{1}{16} \left[ 1 - \left( \frac{r}{r_0} \right)^4 - 4 \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \ln \left( \frac{r}{r_0} \right) \right]$$

Momento radiale per unità di lunghezza in funzione del raggio:

$$M_r = M_{rb} \frac{1}{2} \left[ 1 + \nu + (1 - \nu) \left( \frac{b}{r} \right)^2 \right] + Q_b b \left\{ \frac{1 + \nu}{2} \ln \left( \frac{r}{b} \right) + \frac{1 - \nu}{4} \left[ 1 - \left( \frac{b}{r} \right)^2 \right] \right\} +$$

$$- \frac{qr^2}{4} \left\{ 1 - \frac{1 - \nu}{4} \left[ 1 - \left( \frac{r_0}{r} \right)^4 \right] - \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 \left[ 1 + (1 + \nu) \ln \left( \frac{r}{r_0} \right) \right] \right\}$$

Momento circonferenziale per unità di lunghezza in funzione del raggio:

$$M_\theta = \frac{\theta D (1 - \nu^2)}{r} + \nu M_r$$

Taglio per unità di lunghezza in funzione del raggio:

$$Q = Q_b \frac{b}{r} - \frac{q}{2r} (r^2 - r_0^2)$$

### Lastre piane circolari

Applicazione: pistone di un attuttore idraulico

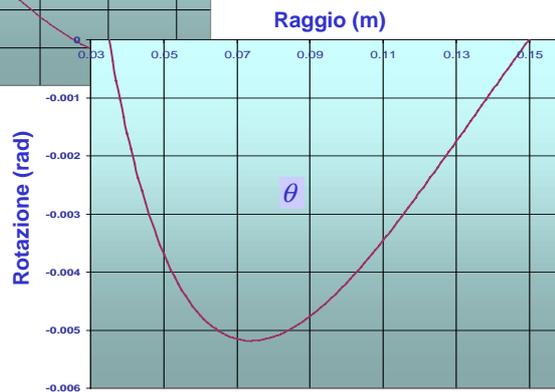
Andamento dello spostamento e della rotazione in funzione del raggio



Esempio di calcolo:

Dati:

$$\begin{aligned} a &= 150 \text{ mm} & b &= 35 \text{ mm} \\ r_0 &= b & s &= 5 \text{ mm} \\ E &= 210 \text{ GPa} & \nu &= 0.3 \\ p &= 0.1 \text{ MPa} \end{aligned}$$



### Lastre piane circolari

Applicazione: pistone di un attuttore idraulico

Andamento dei momenti flettenti in funzione del raggio

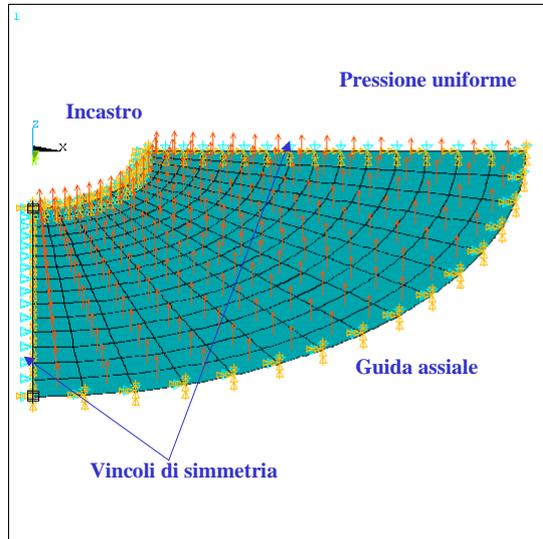


### Lastre piane circolari

Applicazione: pistone di un attuatore idraulico

Dati:

Modello ad elementi finiti  $a = 150 \text{ mm}$   $b = 35 \text{ mm}$   $r_0 = b$   $s = 5 \text{ mm}$   
 $E = 210 \text{ GPa}$   $\nu = 0.3$   $p = 0.1 \text{ MPa}$

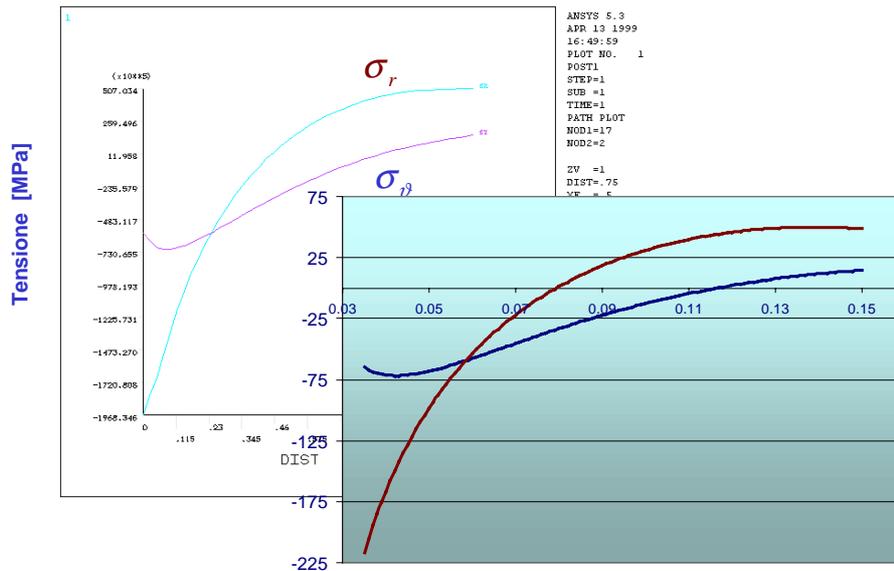


```
ANSYS 5.3
APR 13 1999
18:51:29
PLOT NO. 1
ELEMENTS
TYPE NUM
0
ROT
PATH
PRES
100000
YV =-.866025
ZV =-.5
DIST=.0825
XF =.075
YF =.075
A-ZS=180
2-BUFFER
```

### Lastre piane circolari

Applicazione: pistone di un attuatore idraulico

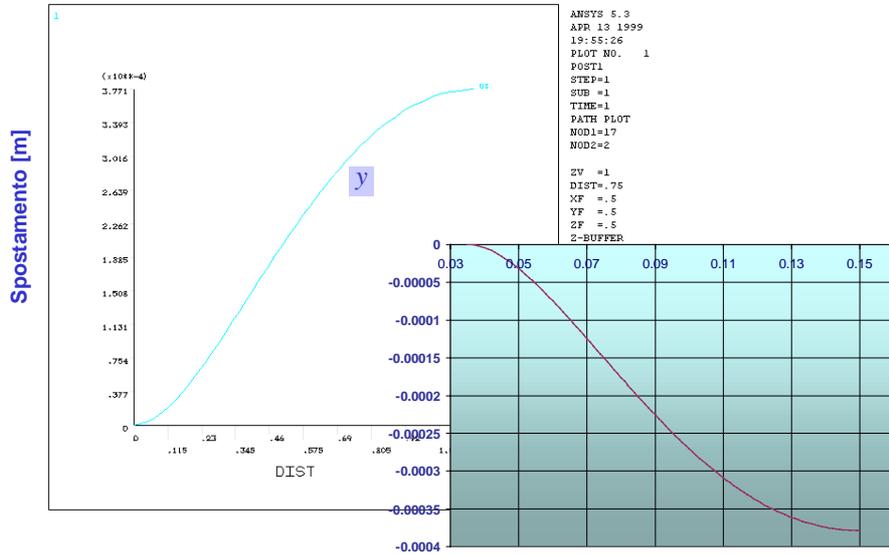
Confronto con il modello ad elementi finiti:



### Lastre piane circolari

Applicazione: pistone di un attuatore idraulico

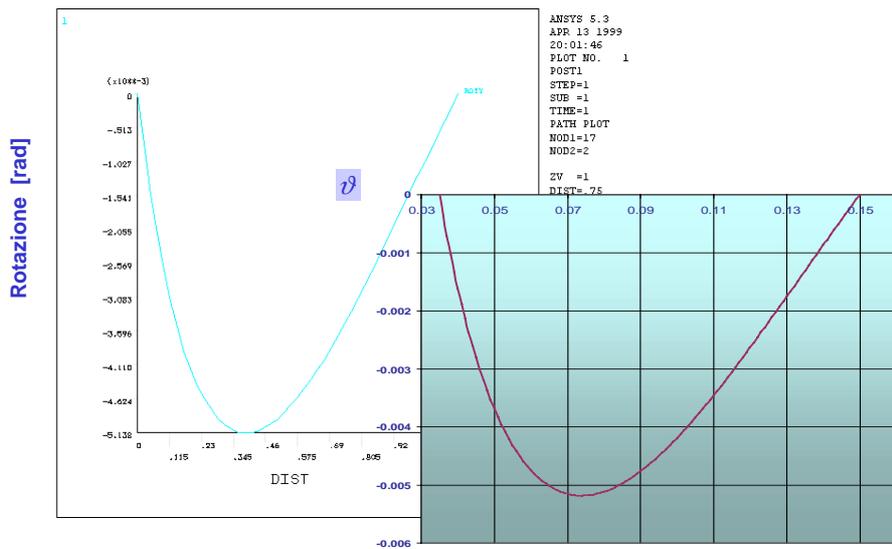
#### Spostamento assiale in funzione del raggio



### Lastre piane circolari

Applicazione: pistone di un attuatore idraulico

#### Rotazione in funzione del raggio



## Lastre piane circolari

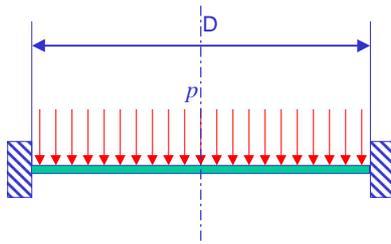
...ed ora provateci voi!

Un paio di esercizi. Contenti?

## Lastre piane circolari

Esercizio n°1

Piastra incastrata al bordo esterno  
soggetta a pressione uniforme



Dati:  $D = 600 \text{ mm}$        $E = 200 \text{ GPa}$   
 $p = 1 \text{ MPa}$              $\nu = 0.3$   
 $s = 10 \text{ mm}$

Calcolare:  
1) la massima tensione di von Mises  
2) il massimo spostamento (freccia)

Nel caso di piastra incastrata  
con pressione uniforme si ha:

$$\varphi = \frac{p}{16D} r(R^2 - r^2)$$

$$\zeta = \frac{p}{64D} (R^2 - r^2)^2$$

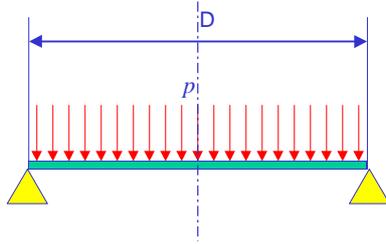
$$m_r = \frac{p}{16} [(1+\nu)R^2 - (3+\nu)r^2]$$

$$m_\vartheta = \frac{p}{16} [(1+\nu)R^2 - (1+3\nu)r^2]$$

### Lastre piane circolari

Esercizio n°2

Piastra appoggiata al bordo esterno  
soggetta a pressione uniforme



Dati:  $D = ?$   $E = 200 \text{ GPa}$   
 $p = 1 \text{ MPa}$   $\nu = 0.3$   
 $s = 10 \text{ mm}$

Calcolare:

- 1) il diametro  $D$  per il quale la freccia in questo caso è uguale a quella calcolata nel caso precedente
- 2) il rapporto tra le tensioni massime di von Mises nei due casi

$$\varphi = \frac{pr}{16D} \left( \frac{3+\nu}{1+\nu} R^2 - r^2 \right)$$

Nel caso di piastra appoggiata con pressione uniforme si ha:

$$\zeta = -\frac{p}{64D} (R^2 - r^2) \left( \frac{5+\nu}{1+\nu} R^2 - r^2 \right)$$

$$m_r = \frac{p}{16} (3+\nu) (R^2 - r^2)$$

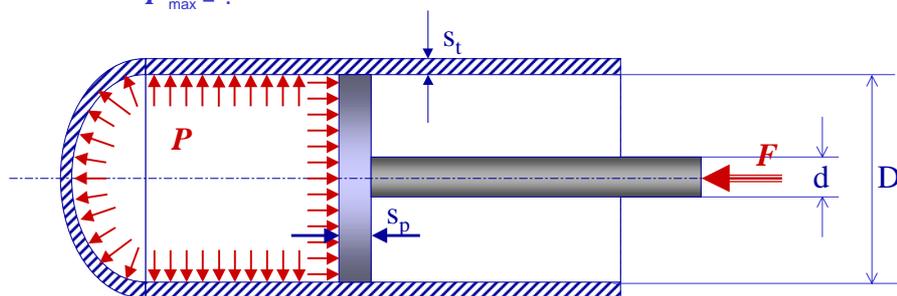
$$m_\theta = \frac{p}{16} [(3+\nu)R^2 - (1+3\nu)r^2]$$

### Lastre piane circolari

Esercizio n°3

Pistone di un attuatore idraulico

Dati:  $D = 120 \text{ mm}$   $d = 30 \text{ mm}$   $s_p = 10 \text{ mm}$   $s_t = 5 \text{ mm}$   
 $E = 200 \text{ GPa}$   $\nu = 0.3$   
 $\sigma_0 = 350 \text{ MPa}$   
 $P_{\max} = ?$



Lastre piane circolari