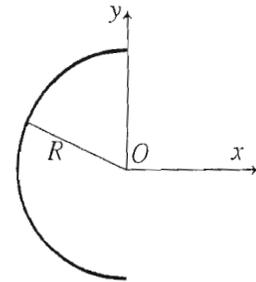


**Elettromagnetismo - C. L. Ing. Aerospaziale**  
**1° canale (A-K), prof. Atzeni**  
**A. A. 2007-2008**

**Foglio di Esercizi n. 1**

- 1.1. (\*\*) Una carica elettrostatica è distribuita uniformemente, con densità lineica  $\lambda$ , su una semiretta che giace sull'asse  $x$  di un riferimento cartesiano ortogonale e si estende da  $x = d$  all'infinito. Calcolare la forza esercitata su una carica  $q$ , posta nell'origine del suddetto sistema di riferimento. Dati:  $\lambda = 1 \mu\text{C}/\text{m}$ ;  $q = 10 \mu\text{C}$ ;  $d = 10 \text{ cm}$ .  
 [Risposta:  $\mathbf{F} = (-\mathbf{i})(1/4\pi\epsilon_0)q\lambda/d$ , dove  $\mathbf{i}$  è il versore dell'asse  $x$ ;  $|\mathbf{F}| = 0.9 \text{ N}$ ]

- 1.2. (\*\*) Una carica elettrostatica  $Q$  è distribuita uniformemente su una semicirconferenza di raggio  $R$ . Trovare modulo, direzione e verso del campo elettrico  $\mathbf{E}_0(O)$  al centro  $O$  della semicirconferenza. Dati:  $Q = -10 \mu\text{C}$ ;  $R = 20 \text{ cm}$ .  
 [Risposta:  $\mathbf{E}_0(O)$  è diretto nel verso negativo dell'asse  $x$  ed ha modulo  $E_0(O) = |Q|/(2\pi^2\epsilon_0 R^2) = 1.43 \times 10^6 \text{ V/m}$ ]



- 1.3. (\*\*) Due sfere conduttrici identiche con carica rispettiva  $q_1 > 0$  e  $q_2 < 0$ , tenute ferme nel vuoto a distanza (fra i centri delle sfere stesse)  $d = 13.3 \text{ cm}$ , si attraggono con una forza di modulo  $F_1 = 1 \text{ N}$ . Le sfere vengono poi collegate con un filo conduttore. Quando il filo viene rimosso le sfere si respingono con una forza di modulo  $F_2 = F_1/8$ . Si chiede di determinare  $q_1$  e  $q_2$ .  
 [Risposta:  $q_1 = 2 \mu\text{C}$  e  $q_2 = -1 \mu\text{C}$  oppure  $q_1 = 1 \mu\text{C}$  e  $q_2 = -2 \mu\text{C}$ ]

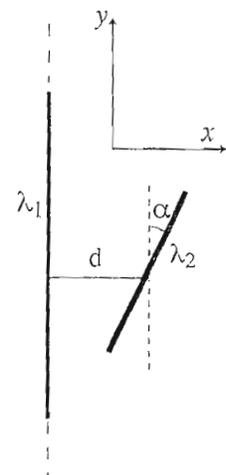
- 1.4. (\*) Una carica elettrostatica è distribuita nel vuoto all'interno di un guscio sferico di raggi interno  $a$  ed esterno  $b$ , con densità di volume  $\rho = kr$ . Calcolare le espressioni del campo elettrico  $\mathbf{E}$  in tutto lo spazio. (Es n.1 della prova scritta di Fisica Generale II del 28.1.97.)

- 1.5. (\*\*) Un modello molto semplificato di atomo con numero atomico  $Z$  consiste in una carica elettrica negativa  $(-Ze)$ , con  $e$  pari al modulo della carica dell'elettrone, corrispondente all'insieme degli elettroni orbitanti, uniformemente distribuita all'interno di una sfera di raggio  $R$ , al cui centro è posta una carica puntiforme  $(+Ze)$ , corrispondente al nucleo. Ricavare l'espressione del campo elettrico in funzione della distanza  $r$  dal centro.  
 (Es n.1 della prova scritta di Fisica Generale II del 13.2.98; I turno)

- 1.6. (\*\*) In un piano giacciono un filo indefinitamente lungo ed una sbarretta di lunghezza  $L$ , entrambi di sezione trascurabile, carichi con densità lineica uniforme, rispettivamente pari a  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . La sbarretta, il cui centro si trova a distanza  $d$  dal filo, è inclinata rispetto al filo stesso di un angolo  $\alpha$  (vedi figura). Calcolare la forza a cui è sottoposta la barretta. Dati:  $\lambda_1 = 1 \text{ nC}/\text{m}$ ;  $\lambda_2 = -1 \mu\text{C}/\text{m}$ ;  $L = 1 \text{ cm}$ ,  $d = 10 \text{ cm}$ ;  $\alpha = 30^\circ$ .  
 [Risposta:

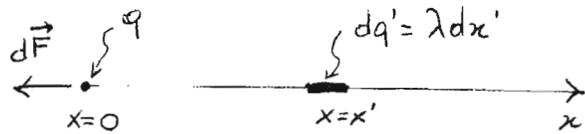
$$F_x = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2\pi\epsilon_0 \sin \alpha} \ln \frac{d + (L/2) \sin \alpha}{d - (L/2) \sin \alpha} = -1.8 \times 10^{-6} \text{ N}; \quad F_y = 0; \quad F_z = 0]$$

(Es. n. 1 della prova scritta di Fisica Generale II del 24.11.1997)



Soluzioni degli esercizi del foglio n. 1

1.1.



Contributo  $d\vec{F}$  dovuto alla carica  $dq'$ :

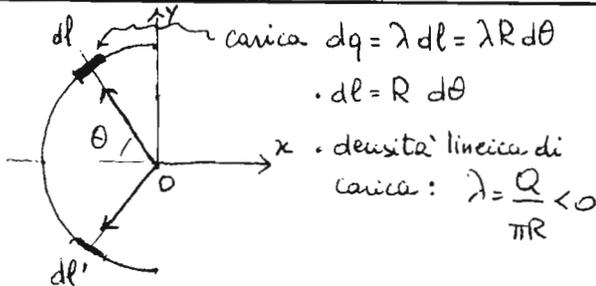
$$d\vec{F} = \frac{q dq'}{4\pi \epsilon_0 x'^2} (-\vec{i})$$

$$\vec{F} = \int_{\text{Semiretta}} d\vec{F} = \int_d^{\infty} \frac{q \lambda dx'}{4\pi \epsilon_0 x'^2} (-\vec{i}) = (-\vec{i}) \frac{q \lambda}{4\pi \epsilon_0} \left[ -\frac{1}{x'} \right]_d^{\infty} = -\vec{i} \frac{q \lambda}{4\pi \epsilon_0 d}$$

↑  
il vettore  $\vec{r}$  con origine in  $dq'$  ed estremo in  $q$  può essere scritto  $\vec{r} = -x'\vec{i}$

$$|\vec{F}| = \frac{10^{-5} 10^{-6}}{4\pi \cdot 8.86 \times 10^{-12} \cdot 0.1} = 0.9 \text{ N}$$

1.2.



carica  $dq = \lambda dl = \lambda R d\theta$

$$dl = R d\theta$$

densità lineica di carica:  $\lambda = \frac{Q}{\pi R} < 0$

Per simmetria, la componente  $y$  di  $\vec{E}_0(0)$  è nulla (due elementi della semicirconferenza, simmetrici rispetto all'asse  $x$ , come  $dl$  e  $dl'$  in figura, danno luogo a contributi opposti ad  $E_{0y}$ ). Poiché, inoltre,  $\lambda < 0$ ,  $\vec{E}_0(0)$  è diretto nel verso negativo dell'asse  $x$ .

$$|E_{0x}(x=0)| = \int_{\text{semicirc.}} |dE_x| = \int_{\text{semicirc.}} \frac{|dq| \cos\theta}{4\pi \epsilon_0 R^2} =$$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} \frac{|\lambda| R \cos\theta d\theta}{4\pi \epsilon_0 R^2} = \frac{|\lambda|}{2\pi \epsilon_0 R} \int_0^{\pi/2} \cos\theta d\theta = \frac{|\lambda|}{2\pi \epsilon_0 R} = \frac{|Q|}{2\pi^2 \epsilon_0 R^2} = 1.43 \times 10^6 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

1.3.

Quando le due sfere vengono collegate, su di esse rimane una carica totale  $q = q_1 - |q_2| = q_1 + q_2$ , che si distribuisce equamente fra le due sfere, su ciascuna delle quali rimane quindi una carica  $(q_1 + q_2)/2$ .

Perciò:

$$F_1 = \frac{-q_2 q_1}{4\pi \epsilon_0 d^2} \quad (1); \quad F_2 = \frac{[(q_1 + q_2)/2]^2}{4\pi \epsilon_0 d^2} \quad (2)$$

$$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{(q_1 + q_2)^2}{-4q_1 q_2} \Rightarrow -4q_1 q_2 \frac{F_2}{F_1} = q_1^2 + 2q_1 q_2 + q_2^2$$

$$q_1^2 + 2q_2 \left(1 + 2 \frac{F_2}{F_1}\right) q_1 + q_2^2 = 0 \Rightarrow q_1 = -\frac{5}{4} q_2 \pm \sqrt{\frac{25}{16} q_2^2 - q_2^2} = \begin{cases} -2q_2 \\ -\frac{1}{2} q_2 \end{cases}$$

Sostituendo nella (1):

$$F_1 = \begin{cases} \frac{2q_2^2}{4\pi \epsilon_0 d^2} \Rightarrow q_2 = -0.99 \mu\text{C}; q_1 = 1.98 \mu\text{C} \\ \frac{q_2^2/2}{4\pi \epsilon_0 d^2} \Rightarrow q_2 = -1.98 \mu\text{C}; q_1 = 0.99 \mu\text{C} \end{cases}$$

1.4.

Sistema di riferimento con origine  $O$  nel centro del guscio. Per simmetria il campo elettrico è radiale. Ne calcoliamo il modulo, applicando la legge di Gauss ad una generica superficie sferica di centro  $O$  e raggio  $r$ :

$$\Phi(r) = 4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot (\text{carica nella regione } r' < r)$$

$$\begin{aligned} r \leq a & \quad E(r) = 0 \\ a \leq r \leq b & \quad E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int_a^r \rho(r') 4\pi r'^2 dr' = \frac{1}{\epsilon_0 r^2} \int_a^r K r'^3 dr' = \frac{K}{4\epsilon_0 r^2} (r^4 - a^4) \\ r > b & \quad E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int_a^b \rho(r') 4\pi r'^2 dr' = \frac{K}{4\epsilon_0 r^2} (b^4 - a^4) \end{aligned}$$

1.5.

Densità volumetrica di carica associata agli elettroni

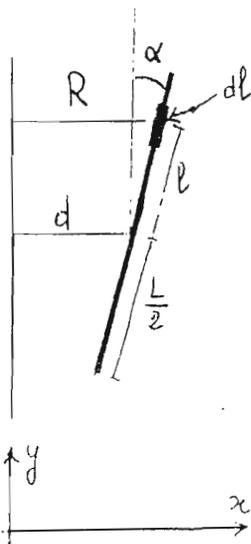
$$\rho(r) = \begin{cases} -\frac{Ze}{(4/3)\pi R^3} & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

Applichiamo la legge di Gauss ad una sup. sferica di raggio  $r$ , con centro nel nucleo:

$$\text{per } r \leq R \quad 4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \left[ Ze + \int_0^r \rho(r') 4\pi r'^2 dr' \right] = \frac{Ze}{\epsilon_0} \left[ 1 - \frac{r^3}{R^3} \right],$$

$$\text{da cui} \quad E(r) = \begin{cases} \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3} \right] & r \leq R \\ 0 & r \geq R \end{cases}$$

1.6.



$$\vec{E} \parallel \hat{x}; \quad E_0(x=R) = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 R}$$

← campo generato da un filo indefinito e rettilineo

$$\vec{F} \parallel \hat{x} \quad dF_x = E_0 dq = \lambda_2 dl E_0(R) \quad \leftarrow \text{forza su un elemento di sbarretta di lunghezza } dl \text{ a distanza } R \text{ dal filo}$$

$$R = d + l \sin \alpha$$

$$F_x = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dF_x = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{dl}{d + l \sin \alpha} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2\pi\epsilon_0 \sin \alpha} \ln \frac{d + \frac{L}{2} \sin \alpha}{d - \frac{L}{2} \sin \alpha} =$$

$$\vec{F}_x = -1.86 \times 10^{-6} \text{ N}; \quad F_y = F_z = 0$$

**Elettromagnetismo - C. L. Ing. Aerospaziale**  
**1° canale (A-K), prof. Atzeni**  
**A. A. 2007-2008**

**Foglio di Esercizi n. 2**

2.1. (\*\*\*) La terra può essere assimilata ad una sfera conduttrice di raggio  $R_T = 6370$  km, su cui è disposta una carica elettrica con densità superficiale  $\sigma = -2.7$  nC/m<sup>2</sup>. L'atmosfera che la circonda è schematizzabile come uno spazio vuoto con carica distribuita uniformemente, con densità (volumica)  $\rho_0$ . Si chiede di calcolare il valore di  $\rho_0$ , sapendo che il campo elettrico alla quota  $h = 1400$  m vale  $E_h = 20$  V/m ed è diretto verso la terra.

[Risposta:  $\rho_0 = +1.8 \times 10^{-12}$  C/m<sup>3</sup>]

(Es A.1 della prova scritta di Elettromagnetismo del 20.9.2002)

2.2. (\*\*\*) Dato nel vuoto uno strato indefinito di spessore  $D$ , uniformemente carico, con densità di volume  $\rho$ , compreso fra un piano (1) di ascissa  $x = -D/2$  ed un piano (2) di ascissa  $x = D/2$ , ricavare l'espressione della differenza di potenziale

a) fra un punto O del piano di mezzeria ed un punto A del piano (2);

b) fra il piano (1) e il piano (2).

[Risposta:  $V_O - V_A = \rho D^2 / 8\epsilon_0$ ; b)  $V_1 - V_2 = 0$ ]

(Es n.1 della prova scritta di Fisica Generale II del 13.2.98 - II turno)

2.3. (\*\*\*) Due conduttori cilindrici di raggio  $a$ , rettilinei, paralleli fra loro, di lunghezza infinita, disposti nel vuoto, hanno carica uguale in modulo, ma di segno opposto. Se  $d$  è la distanza tra i due assi e  $\Delta V$  è la differenza di potenziale fra i due conduttori, determinare l'espressione del modulo della carica per unità di lunghezza presente su ciascuno dei due conduttori.

[Risposta:  $\lambda = \pi\epsilon_0\Delta V / \ln[(d-a)/a]$ ]

(Es. n.1 della prova scritta di Fisica generale II del 21.10.2000)

2.4. (\*\*\*) Una carica  $q = 20$  nC è distribuita uniformemente, nel vuoto, lungo una circonferenza di raggio  $R = 9$  cm; al centro  $O$  della circonferenza è posta una carica puntiforme  $Q = -100$  nC. Calcolare il lavoro  $L$  necessario per portare la carica  $Q$  dal punto  $O$  al punto  $P$ , posto sull'asse della circonferenza, a distanza  $d = \sqrt{3}R$  da  $O$ .

[Risposta:  $L = -Qq/8\pi\epsilon_0 R = 100$   $\mu$ J]

(Es. A.1 della prova scritta di Elettromagnetismo del 18.12.2001)

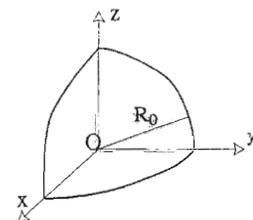
2.5. (\*\*\*) Una particella di massa  $m = 1$  g e carica  $q_0 = 100$  pC è posta, nel vuoto, al centro di un anello di raggio  $R = 10$  cm, su cui è distribuita uniformemente la carica  $q = -10$  nC. La particella viene spostata di un tratto  $x_0 = 0.5$  cm lungo l'asse dell'anello e quindi viene abbandonata. Dimostrare che la particella si muove lungo l'asse e oscilla con moto armonico attorno all'origine (centro dell'anello); determinare inoltre il periodo  $T$  delle oscillazioni.

[Risposta:  $T = 2\pi[4\pi\epsilon_0 m R^3 / q_0 |q|]^{1/2} = 66$  s]

2.6. (\*\*\*) Data una distribuzione di carica uniforme e costante  $\rho_0$  all'interno di un volume pari ad un ottavo di sfera di raggio  $R_0$ , come indicato in figura, determinare il campo elettrico  $\mathbf{E}$  nell'origine  $O$  del sistema di riferimento indicato.

[Risposta:  $E_x = E_y = E_z = -\rho_0 R_0 / 16\epsilon_0$ ]

(Es. n. 2 della prova scritta di Fisica II del 19.6.2000)



# Elettromagnetismo - C. L. Ing. Aerospaziale

1° canale (A-K), prof. Atzeni

A. A. 2007-2008

## Soluzioni degli esercizi del foglio n. 2

2.1. Applichiamo il teorema di Gauss ad una sfera concentrica con la terra e di raggio  $R_T + h$ . Osserviamo che sulla superficie di questa sfera  $\vec{E} \cdot \vec{n} = -E_h$ , essendo  $\vec{n}$  il versore della normale uscente dalla sfera. Si ha quindi

$$-4\pi(R_T + h)^2 E_h = \frac{1}{\epsilon_0} \left[ 4\pi R_T^2 \sigma + \int_{R_T}^{R_T+h} 4\pi \rho_0 r^2 dr \right],$$

$$-4\pi(R_T + h)^2 E_h \epsilon_0 = 4\pi R_T^2 \sigma + 4\pi \rho_0 \frac{1}{3} [(R_T + h)^3 - R_T^3],$$

da cui

$$\rho_0 = -3 \frac{R_T^2 \sigma + (R_T + h)^2 E_h \epsilon_0}{(R_T + h)^3 - R_T^3} = 1.8 \times 10^{-12} \text{ C/m}^3.$$

2.2. Per la simmetria del problema il campo elettrico è diretto parallelamente all'asse  $x$ . Inoltre  $E_x(x) = -E_x(-x)$  e  $E_x(0) = 0$ . Dati due punti  $P$  e  $Q$  di ascissa  $x_P$  e  $x_Q$ , rispettivamente, si ha allora:

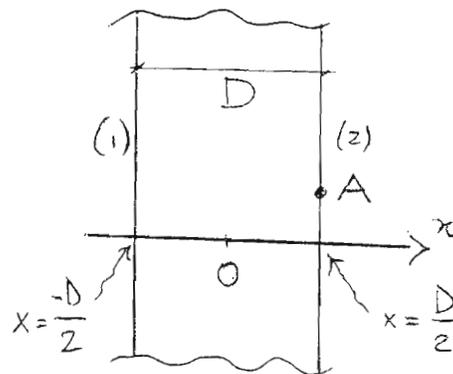
$$V_P - V_Q = - \int_Q^P \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{x_Q}^{x_P} E_x(x) dx. \quad (1)$$

Applicando il teorema di Gauss a un cilindro interno allo strato, con una base nel piano di simmetria ( $x = 0$ ) e l'altra in una generica posizione  $x$  (con  $-D/2 \leq x \leq D/2$ ), si ha

$$E_x(0) dS + E_x(x) dS = \frac{\rho x dS}{\epsilon_0}, \text{ da cui } E_x(x) = \frac{\rho x}{\epsilon_0}.$$

Inserendo quest'ultima espressione nella (1) otteniamo

$$V_0 - V_A = - \int_{x=D/2}^{x=0} \frac{\rho x dx}{\epsilon_0} = \frac{1}{2} \frac{\rho x^2}{\epsilon_0} \Big|_0^{D/2} = \frac{1}{8} \frac{\rho D^2}{\epsilon_0} \quad \text{e} \quad V_1 - V_2 = 0.$$



2.3. Ricordiamo che il campo elettrico di un filo indefinito di raggio  $a$  è radiale e, per  $r \geq a$ , ha modulo  $E(r) = \lambda/2\pi\epsilon_0 r$ . Sull'asse  $x$  (vedi figura) il campo è quindi parallelo all'asse stesso e pari alla somma (algebrica) dei contributi dovuti ai due fili. In particolare, nell'intervallo  $a \leq x \leq d - a$  si ha

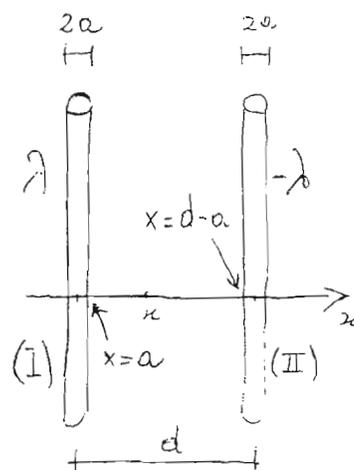
$$E_x(x) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x} - \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0(d-x)} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right).$$

La differenza di potenziale  $\Delta V$  è quindi

$$\Delta V = \int_a^{d-a} E_x(x) dx = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left( \ln \frac{d-a}{a} - \ln \frac{a}{d-a} \right) = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{d-a}{a},$$

da cui si ottiene

$$\lambda = \frac{\pi\epsilon_0 \Delta V}{\ln \frac{d-a}{a}}.$$



2.4. Il lavoro che si deve compiere dall'esterno per spostare la carica  $Q$  dal punto  $O$  al punto  $P$  è dato da

$$L = Q[V(P) - V(O)], \quad (2)$$

dove  $V$  è il potenziale elettrico. Il potenziale generato da una carica puntiforme  $q$  a distanza  $r$  dalla carica stessa, e assumendo nullo il potenziale all'infinito, è  $V(r) = q/4\pi\epsilon_0 r$ . Nel caso in esame, con distribuzione lineare di carica  $\lambda = q/2\pi R$ , sull'asse della circonferenza si ha (vedi figura)

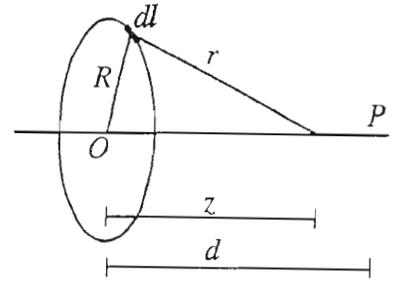
$$V(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{circ}} \frac{\lambda dl}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda 2\pi R}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{z^2 + R^2}}.$$

Nei punti  $P$  ( $z = d = \sqrt{3}R$ ) e  $O$  ( $z = 0$ ) il potenziale è quindi

$$V(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{d^2 + R^2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2R}; \quad V(O) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}.$$

Sostituendo nell'Eq. (2) si ha

$$L = Q \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{2R} - \frac{1}{R} \right] = -\frac{Qq}{2R} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \frac{10^{-7} \times 2 \times 10^{-8}}{2 \times 9 \times 10^{-2}} 9 \times 10^9 = 10^{-4} \text{ J} = 100 \mu\text{J}.$$



2.5. In un generico punto sull'asse  $x$  il campo elettrico è dato da  $\vec{E}_0(x, 0, 0) = (E_x, 0, 0)$ , con

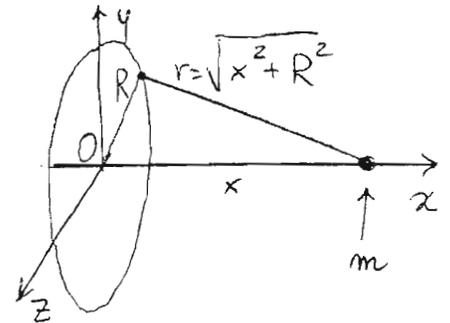
$$E_x(x) = \int_0^{2\pi R} \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{x}{r} = \frac{2\pi R \lambda x}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{-|q|x}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}} \approx \frac{-|q|x}{4\pi\epsilon_0 R^3},$$

dove l'ultimo passaggio è giustificato dall'ipotesi  $x \ll R$ . La particella è quindi soggetta alla forza, diretta lungo l'asse  $x$ ,  $F_x = q_0 E_x(x)$  e il suo moto è descritto dall'equazione  $m\ddot{x} = q_0 E_x(x)$ , ovvero da

$$\ddot{x} + \frac{q_0 |q|}{4\pi\epsilon_0 m R^3} x = 0,$$

la cui soluzione è un moto armonico di periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 m R^3}{q_0 |q|}} = 66 \text{ s}.$$



2.6. Per la simmetria del problema,  $E_x = E_y = E_z$  nell'origine  $O$  del sistema di riferimento. Calcoliamo  $E_z$ . Il contributo  $dE_z$  dovuto alla carica contenuta nel volume elementare  $d\tau = r^2 dr d\varphi \sin\theta d\theta$  attorno al punto  $P$  di coordinate  $(r, \theta, \varphi)$  è

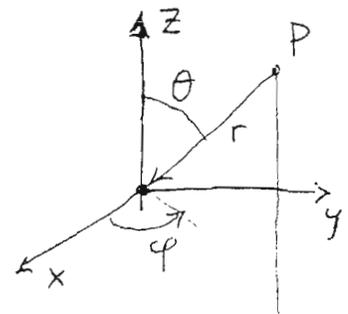
$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_0 d\tau}{r^2} \frac{(-z)}{r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_0 d\tau}{r^2} \cos\theta.$$

Integrando su tutto il volume contenente carica si ha

$$E_z = \int_0^{R_0} dr \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \sin\theta \cos\theta \cdot \left( -\frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \right).$$

Osserviamo che  $\int_0^{\pi/2} d\theta \sin\theta \cos\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} d(\sin^2\theta) = \frac{1}{2}$ . Abbiamo quindi  $E_z = R_0 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-\rho_0 R_0}{4\epsilon_0} = -\frac{\rho_0 R_0}{16\epsilon_0}$  e il campo elettrico in  $O$  è

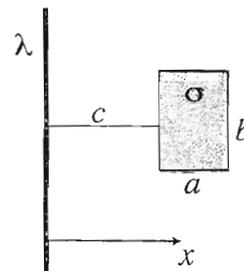
$$\vec{E}(0, 0, 0) = -\frac{\rho_0 R_0}{16\epsilon_0} \cdot (1; 1; 1).$$



**Elettromagnetismo - C. L. Ing. Aerospaziale**  
**1° canale (A-K), prof. Atzeni**  
**A. A. 2007-2008**

**Foglio di Esercizi n. 3**

- 3.1. (\*\*\*) Nella situazione mostrata in figura, nel vuoto sono disposti un filo rettilineo molto lungo, carico con densità lineica uniforme  $\lambda$ , e una sottile lastra rettangolare, complanare con il filo, con un lato parallelo al filo, carica con densità superficiale uniforme  $\sigma$ . Determinare l'espressione della forza che si esercita sulla lastra.



[Risposta:  $F_y = F_z = 0$ ;  $F_x = \frac{\lambda\sigma b}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{a+c}{c}\right)$ ]

(Es. n. 1 della prova scritta di Fisica Generale II del 12.2.99 - II turno)

- 3.2. (\*\*\*) In una regione sferica  $a < r < b$ , con  $a = 1$  cm, è distribuita una carica elettrica con densità di volume  $\rho = A/r$ , dove  $A$  è costante. Al centro della cavità ( $r = 0$ ) c'è una carica puntiforme  $q = 62.8$  nC. Determinare il valore di  $A$ , affinché il campo elettrico abbia intensità costante nella regione  $a < r < b$ . [Risposta:  $A = q/2\pi a^2 = 10^{-4}$  C/m<sup>2</sup>.]

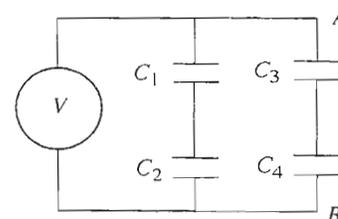
(Es. n. 1 della prova scritta di Fisica generale II del 5.6.1998 - II turno)

- 3.3. (\*\*\*) Una carica positiva  $Q$  è distribuita uniformemente, nel vuoto, all'interno di una sfera di centro  $O$  e raggio  $R$ . Una particella puntiforme di massa  $m$  e carica elettrica positiva  $q$ , vincolata a muoversi lungo una direzione radiale passante per  $O$ , viene lanciata con velocità iniziale  $v$  diretta verso  $O$ , da un punto posto a distanza  $D$  da  $O$ . Determinare l'espressione del valore minimo di  $v$  affinché la particella raggiunga il centro  $O$ .

[Risposta:  $v_{\min} = \sqrt{\frac{qQ}{2\pi\epsilon_0 m} \left(\frac{3}{2R} - \frac{1}{D}\right)}$ ]

(Es. n. 2 della prova scritta di Fisica generale II del 13.2.1998 - II turno)

- 3.4. (\*\*\*) Si considerino i quattro condensatori  $C_1$ - $C_4$ , collegati come in figura, e di capacità  $C_1 = 4$   $\mu$ F,  $C_2 = 1.33$   $\mu$ F,  $C_3 = 1.33$   $\mu$ F, e  $C_4 = 4$   $\mu$ F. Sia  $V = 100$  V. Calcolare la capacità equivalente fra  $A$  e  $B$ , l'energia elettrostatica totale  $U$ , la differenza di potenziale  $V_1$  ai capi di  $C_1$  e la carica  $Q_1$  su  $C_1$ .



[Risposta:  $C_{\text{eq}} = 2$   $\mu$ F;  $U = 10$  mJ;  $Q_1 = 100$   $\mu$ C;  $V_1 = 25$  V.]

- 3.5. (\*\*\*) Un condensatore di capacità  $C_1 = 10$   $\mu$ F viene caricato alla d.d.p.  $V_1 = 100$  V. Il condensatore viene poi disconnesso dal generatore. Successivamente un condensatore di capacità  $C_2 = 40$   $\mu$ F viene posto in parallelo a  $C_1$ . Determinare la d.d.p.  $V'$  che si stabilisce ai capi dei condensatori, la carica su ciascun condensatore e la variazione di energia elettrostatica nel processo di messa in parallelo dei condensatori.

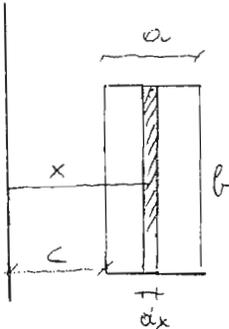
[Risposta:  $V' = V_1 C_1 / (C_1 + C_2) = 20$  V;  $Q'_1 = C_1 V' = 0.2$  mC;  $Q'_2 = C_2 V' = 0.8$  mC;  $\Delta U = -(1/2) C_1 V_1^2 [C_2 / (C_1 + C_2)] = -40$  mJ.]

- 3.6. (\*\*\*) Un condensatore a facce piane e parallele, di capacità  $C = 1$   $\mu$ F, è caricato con una pila a una differenza di potenziale  $V_0 = 10$  V, e successivamente è lasciato isolato. Calcolare il lavoro  $L$  che si deve compiere dall'esterno per aumentare del 10% la distanza fra le armature.

[Risposta:  $L = (1/2) C V_0^2 (\Delta d / d) = 5 \times 10^{-6}$  J.]

Soluzioni degli esercizi del foglio n. 3

3.1



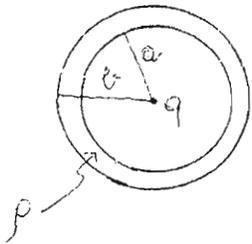
$$d\vec{F} = dq \vec{E} \quad \vec{E} \text{ radiale} \Rightarrow F_x = F_z = 0$$

$$E_x(x) = \lambda / 2\pi\epsilon_0 x \quad (\text{campo di un filo } \infty)$$

$$\text{Forza su striscia di spessore } dx \text{ e lunghezza } b: dF_x = \frac{\lambda b dx}{2\pi\epsilon_0 x}$$

$$\text{Su tutta la lastra: } F_x = \int_{x=c}^{x=c+a} dF_x = \int_c^{c+a} \frac{\lambda b dx}{2\pi\epsilon_0 x} = \frac{\lambda b}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{c+a}{c}$$

3.2



Si applica la legge di Gauss ad una sfera con centro  $q$  e raggio  $r$  ( $a \leq r \leq b$ )

$$4\pi r^2 E_o(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \left[ q + \int_a^r \rho(r) 4\pi r^2 dr \right] \quad \text{con } \rho(r) = \frac{A}{r}$$

$$E_o(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[ q + 4\pi \int_a^r \frac{A}{r} r^2 dr \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[ q + 4\pi A \left( \frac{r^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ 2\pi A + \frac{1}{r^2} (q - 2\pi A a^2) \right] \Rightarrow E_o(r) = \text{costante}$$

$$\text{se } A = \frac{q}{2\pi a^2} = \frac{10^{-4} \text{ C}}{\text{m}^2}$$

3.3

La particella si muove in un campo conservativo, quindi

$$\frac{1}{2} m v_{(D)}^2 + U(D) = \frac{1}{2} m v_{(O)}^2 + U(O) \quad U = qV$$

$$v_{(D)} = v_{\min} \text{ se } v_{(O)} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} m v_{\min}^2 = q [V(O) - V(D)]; \quad v_{\min} = \sqrt{\frac{2q(V(O) - V(D))}{m}}$$

$$V(O) - V(D) = - \int_D^O E(r) dr = \int_0^D E(r) dr \quad ; \quad \text{per calcolare } E(r) \text{ legge di Gauss}$$

$$\text{per } r \leq R: \quad 4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r \rho 4\pi r^2 dr \Rightarrow E(r) = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

$$\text{per } r \geq R: \quad E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$\text{quindi } V(O) - V(D) = \int_0^R \frac{Qr dr}{4\pi\epsilon_0 R^3} + \int_R^D \frac{Q dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \dots = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3}{2R} - \frac{1}{D} \right]$$

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{qQ}{2\pi m \epsilon_0} \left( \frac{3}{2R} - \frac{1}{D} \right)}$$

3.4

$$C_1 \text{ in serie con } C_2 : C_{12} = C_1 C_2 / (C_1 + C_2) = 1 \mu\text{F}$$

$$C_3 \text{ in serie con } C_4 : C_{34} = C_3 C_4 / (C_3 + C_4) = 1 \mu\text{F}$$

$$C_{\text{eq}} = C_{12} // C_{34} = C_{12} + C_{34} = 2 \mu\text{F}$$

$$U = \frac{1}{2} C_{\text{eq}} V^2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 10^{-6} \times (10^2)^2 = 10^{-2} \text{ J} = 10 \text{ mJ}$$

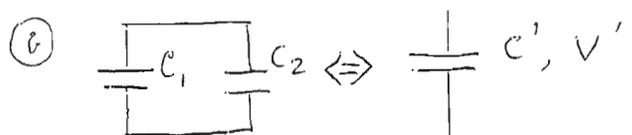
$$C_{12} = C_{34}, \text{ quindi } Q_{12} = Q_{34} = Q/2 = \frac{C_{\text{eq}} V}{2} = 100 \mu\text{C}$$

$$C_1 \text{ e } C_2 \text{ in serie, quindi } Q_1 = Q_2 = Q_{12} = 100 \mu\text{C}; V_1 = Q_1 / C_1 = 25 \text{ V}$$

3.5



$$Q_1 = C_1 V_1 = 10^{-3} \text{ C} = 1 \text{ mC}$$



$$Q' = Q'_1 + Q'_2 = Q_1 = C_1 V_1 \quad C' = C_1 + C_2$$

$$V' = \frac{Q'}{C'} = \frac{C_1 V_1}{C_1 + C_2} = 20 \text{ V}$$

$$Q'_1 = C_1 V'_1 = 0.2 \text{ mC}; \quad Q'_2 = C_2 V'_2 = 0.8 \text{ mC}$$

$$\Delta U = U^{(b)} - U^{(a)} = \frac{1}{2} C' V'^2 - \frac{1}{2} C_1 V_1^2 = \dots = -\frac{1}{2} C_1 V_1^2 \frac{C_2}{C_1 + C_2} = -40 \text{ mJ}$$

3.6

$$L = E_{\text{finale}} - E_{\text{iniziale}} = \frac{1}{2} \left[ \frac{Q^2}{C_{\text{finale}}} - \frac{Q^2}{C} \right]; \quad Q = C V_0$$

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{d}; \quad C_{\text{finale}} = \epsilon_0 \frac{S}{d + \Delta d} = C \frac{d}{d + \Delta d}$$

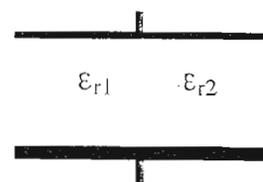
$$L = \frac{1}{2} C V_0^2 \left[ \frac{C}{C_{\text{finale}}} - 1 \right] = \frac{1}{2} C V_0^2 \left[ \frac{d + \Delta d}{d} - 1 \right] = \frac{1}{2} C V_0^2 \frac{\Delta d}{d} = 5 \mu\text{J}$$

Elettromagnetismo - C. L. Ing. Aerospaziale  
1° canale (A-K), prof. Atzeni  
A. A. 2007-2008

Foglio di Esercizi n. 4

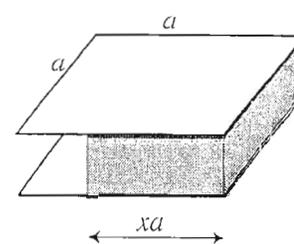
- 4.1. (\*\*) Un condensatore a facce piane e parallele ha nel vuoto una capacità  $C_0 = 10 \mu\text{F}$ . Successivamente viene riempito per metà volume con un dielettrico di costante dielettrica relativa  $\epsilon_{r1} = 1.4$  e per l'altra metà con un dielettrico di costante  $\epsilon_{r2} = 1.6$  (vedi figura). Calcolare il nuovo valore della capacità  $C$  e il rapporto fra le cariche di polarizzazione sui due dielettrici.

[Risposta:  $C = 15 \mu\text{F}$ ;  $\sigma_{p1}/\sigma_{p2} = (\epsilon_{r1} - 1)/(\epsilon_{r2} - 1) = 2/3$   
(Es. n. A.1 della prova scritta di Elettromagnetismo del 5.12.2001)]



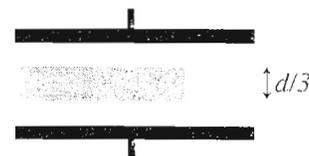
- 4.2. (\*\*) Un condensatore a facce piane e parallele, quadrate di lato  $a$ , è riempito per un tratto  $l = xa$ , con  $0 \leq x \leq 1$  (vedi figura), da una lastra di dielettrico omogeneo ed isotropo, di costante dielettrica relativa  $\epsilon_r$ . Siano  $E_a$  e  $E_d \gg E_a$  le rigidità dielettriche dell'aria e del dielettrico, rispettivamente. Determinare l'espressione, in funzione di  $x$ , del modulo della carica massima  $Q_{\max}$  che può essere posta su un'armatura senza che si abbia una scarica. Calcolarne il valore numerico per  $a^2 = 1111 \text{ cm}^2$ ;  $x = 1/4$ ;  $E_a = 33.3 \text{ kV/cm}$ ;  $\epsilon_r = 9$ . (Approssimare  $\epsilon_0 \simeq 9 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$ .)

[Risposta:  $Q_{\max} = \epsilon_0 a^2 E_a [1 + x(\epsilon_r - 1)] = 10 \mu\text{C}$ .]  
(Es. n. 1 della prova scritta di Elettromagnetismo del 18.3.2002)]



- 4.3. (\*\*) Un condensatore piano, con distanza fra le armature pari a  $d$ , ha capacità  $C = 1 \mu\text{F}$ . Determinare il valore  $C_1$  della capacità quando un foglio metallico, di spessore  $d/3$ , viene posto nello spazio fra le armature, parallelamente alle armature stesse (vedi figura).

[Risposta:  $C_1 = (3/2)C = 1.5 \mu\text{F}$ .]



- 4.4. (\*\*) Un materiale con costante dielettrica relativa  $\epsilon_r = 3$  e rigidità dielettrica  $E_r = 20 \text{ MV/m}$  viene impiegato come mezzo dielettrico in un condensatore a facce piane e parallele. Determinare il valore minimo  $A_{\min}$  dell'area dei piatti in modo che il condensatore abbia capacità  $C = 100 \text{ pF}$  e ai suoi capi possa essere applicata una differenza di potenziale  $V = 5.4 \text{ kV}$ .

[Risposta:  $A_{\min} = VC'/\epsilon_0 \epsilon_r E_r = 10 \text{ cm}^2$ .]

- 4.5. (\*\*) Un condensatore piano, con armature di area  $S$ , viene riempito (vedi figura) con due dielettrici di costante dielettrica relativa  $\epsilon_{r1}$  e  $\epsilon_{r2}$ . Determinare l'espressione della capacità del condensatore.

[Risposta:  $C = \epsilon_0 \epsilon_{r1} S \epsilon_{r2} / (\epsilon_{r1} d_2 + \epsilon_{r2} d_1)$ ]



- 4.6. (\*\*) Calcolare a) la carica massima che può essere posta su una sfera metallica di raggio  $R = 15 \text{ cm}$ , in aria, sapendo che la rigidità dielettrica dell'aria è  $E_r = 30 \text{ kV/cm}$ ; b) il potenziale a cui si porta la sfera in queste condizioni (assumendo potenziale nullo all'infinito).

[Risposta:  $Q_{\max} = 4\pi \epsilon_0 R^2 E_r = 7.5 \mu\text{C}$ ;  $V = R E_r = 450 \text{ kV}$ .]

- 4.7. (\*\*) Una sfera metallica di raggio  $R$ , in aria, carica ed isolata elettricamente, ha un potenziale  $V$  (assumendo potenziale nullo all'infinito). Calcolare le espressioni a) della densità di energia elettrostatica  $w_s$  in prossimità della superficie della sfera; b) dell'energia elettrostatica  $U$  immagazzinata in tutto lo spazio. [Risposta:  $w_s = \epsilon_0 V^2 / 2R^2$ ;  $U = 2\pi \epsilon_0 V^2 R$ ]

Elettromagnetismo - C. L. Ing. Aerospaziale  
 1° canale (A-K), prof. Atzeni  
 A. A. 2007-2008

Soluzioni degli esercizi del foglio n. 4

4.1 Il condensatore può essere considerato costituito da due condensatori in parallelo, con capacità totale

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r1} (S/2)}{d} + \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r2} (S/2)}{d} = \frac{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}}{2} C_0 = 15 \mu F$$

$$\sigma = \vec{P} \cdot \vec{n}; \quad (\vec{n}: \text{normale alla sup. del diel.}); \quad \vec{P} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \vec{E}$$

$$\text{quindi } \sigma_{1p} = \epsilon_0 (\epsilon_{r1} - 1) |\vec{E}_1|; \quad \sigma_{2p} = \epsilon_0 (\epsilon_{r2} - 1) |\vec{E}_2|; \quad \leftarrow \text{perché } \vec{E} // \vec{n}$$

$$\text{essendo } \vec{E}_1 = \vec{E}_2, \text{ si ha: } \frac{\sigma_{1p}}{\sigma_{2p}} = \frac{\epsilon_{r1} - 1}{\epsilon_{r2} - 1} = 0.67$$

4.2 Come nell'esercizio precedente,

$$C = C_1 + C_2 = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{x \cdot a \cdot a}{d} + \epsilon_0 \frac{(1-x)a \cdot a}{d} = \frac{\epsilon_0 a^2}{d} [1 + x(\epsilon_r - 1)]$$

La carica massima che può essere posta su un'armatura è quella corrispondente alla massima d.d.p. sostenibile,  $V_{\max} = E_a d$ ,

$$\text{quindi } Q_{\max} = C V_{\max} = C E_a d = \epsilon_0 a^2 E_a [1 + x(\epsilon_r - 1)]$$

Con i dati del problema,  $Q_{\max} = 10 \mu C$ .

4.3

$C = \epsilon_0 \frac{S}{d}$

$C_1 = \frac{C' C''}{C' + C''}$

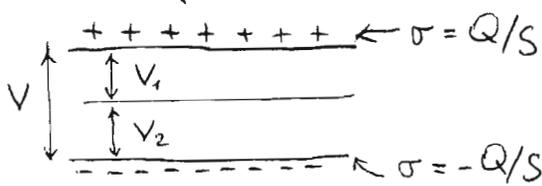
$C_1 = \frac{C' C''}{C' + C''} = \frac{\cancel{\epsilon_0} \frac{S}{x} \cdot \epsilon_0 \frac{S}{\frac{2}{3}d-x}}{\cancel{\epsilon_0} S \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{2}{3}d-x} \right)} = \epsilon_0 S \frac{1}{(\frac{2}{3}d)} = \frac{3}{2} C = 1.5 \mu F$

$C' = \epsilon_0 \frac{S}{x}; \quad C'' = \epsilon_0 \frac{S}{\frac{2}{3}d-x}$

$$4.4 \quad C = \epsilon_0 \epsilon_r A/d; \quad V = Ed \leq E_r d \Rightarrow d \geq \frac{V}{E_r}$$

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A_{\min} E_r}{V} \Rightarrow A_{\min} = \frac{VC}{\epsilon_0 \epsilon_r E_r} = 10 \text{ cm}^2$$

4.5



$$V = V_1 + V_2 = E_1 d_1 + E_2 d_2$$

per legge di Gauss:  $E_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_1} = \frac{Q/S}{\epsilon_1}$ ;  $E_2 = \frac{Q/S}{\epsilon_2}$

quindi  $V = \frac{Q d_1}{S \epsilon_1} + \frac{Q d_2}{S \epsilon_2}$

$$C = \frac{Q}{V} = S \frac{1}{(d_1/\epsilon_1) + (d_2/\epsilon_2)} = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 d_1 + \epsilon_2 d_2} S \epsilon_0$$

4.6 legge di Gauss  $E(r) = Q/4\pi\epsilon_0 r^2$  per  $r \geq R$ ;  $E(r) = 0$  per  $r < R$

$E(r)$  è massimo per  $r = R \Rightarrow E_{\max} = E(R) < E_r$

$$\Rightarrow Q < Q_{\max} = 4\pi\epsilon_0 E_r R^2 = 7.5 \mu\text{C}$$

$$V = \frac{Q_{\max}}{4\pi\epsilon_0 R} = E_r R = 450 \text{ kV}$$

4.7

$$V = Q/4\pi\epsilon_0 R \Rightarrow Q = 4\pi\epsilon_0 R V.$$

per  $r \geq R$ ,  $E_0(r) = Q/4\pi\epsilon_0 r^2 = VR/r^2$ .

In prossimità della sfera ( $r \approx R$ )  $E_0(R) \approx V/R$ ;  $w_s = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{V^2 \epsilon_0}{2R^2}$

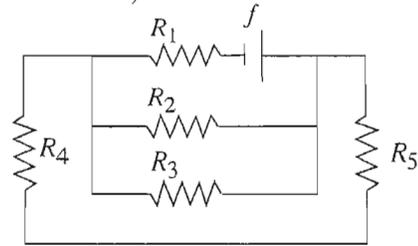
$$U = \int_0^{\infty} w(r) 4\pi r^2 dr = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \epsilon_0 E(r)^2 4\pi r^2 dr = 2\pi\epsilon_0 \int_R^{\infty} \left(\frac{VR}{r^2}\right)^2 r^2 dr = 2\pi\epsilon_0 V^2 R$$

**Elettromagnetismo - C. L. Ing. Aerospaziale**  
**1° canale (A-K), prof. Atzeni**  
**A. A. 2007-2008**

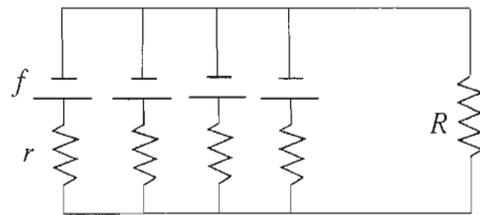
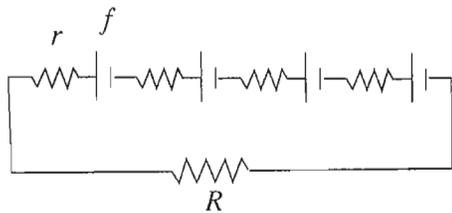
**Foglio di Esercizi n. 5**

- 5.1. (\*\*\*) La resistenza di una stufa elettrica di potenza  $P = 600 \text{ W}$ , alimentata a  $V = 220 \text{ V}$  (in corrente continua), è costituita da un lungo filo di tungsteno del diametro  $d = 0.5 \text{ mm}$ . Sapendo che la resistenza del filo alla temperatura ambiente  $T_0 = 15^\circ\text{C}$  è  $R_0 = 22 \Omega$ , calcolare: a) la temperatura del filo quando la stufa è accesa e opera in condizioni stazionarie (trascurare la dilatazione del filo); b) la potenza  $P_0$  assorbita all'istante di accensione della stufa; c) la lunghezza  $l_0$  del filo alla temperatura  $T_0$ . Dati: resistività del tungsteno  $\rho_0 = 5.6 \times 10^{-8} \Omega\text{m}$  (a  $T = T_0$ ); coefficiente termico  $\alpha = 4.5 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ .  
 [Risposta: a)  $T = 607.6^\circ\text{C}$ ; b)  $P_0 = V^2/R_0 = 2200 \text{ W}$ ; c)  $l_0 = R_0\pi d^2/(4\rho_0) = 77.1 \text{ m}$ .]  
 (Es. n. 2 della prova scritta di Fisica Generale II del 30.1.1998)

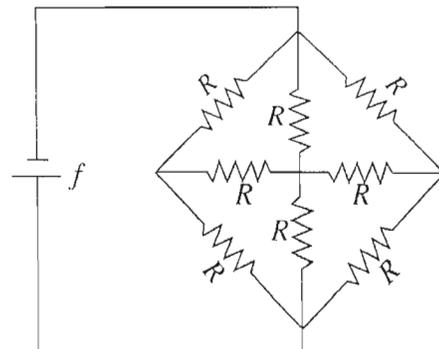
- 5.2. (\*\*\*) Con riferimento al circuito mostrato nella figura, calcolare la corrente nella resistenza  $R_4$  e la differenza di potenziale ai capi della resistenza  $R_2$ , utilizzando i seguenti dati:  $f = 25 \text{ V}$ ;  $R_1 = R_3 = 10 \Omega$ ;  $R_2 = R_5 = 5 \Omega$ ;  $R_4 = 20 \Omega$ .  
 [Risposta:  $V_2 = 5.67 \text{ V}$ ;  $I_4 = 0.227 \text{ A}$ .]



- 5.3. (\*) Quattro pile aventi la stessa f.e.m.  $f = 9 \text{ V}$  e la stessa resistenza interna  $r = 1 \Omega$ , possono essere collegate tutte in serie o tutte in parallelo ad un resistore con  $R = 10 \Omega$  (vedi figura). Calcolare nei due casi la potenza  $P_{er}$  complessivamente erogata dai generatori e la potenza  $P_{car}$  trasferita sul carico  $R$  [Risposta: a) pile in serie:  $P_{er} = 92.6 \text{ W}$ ;  $P_{car} = 66.1 \text{ W}$ ; b) pile in parallelo:  $P_{er} = 7.90 \text{ W}$ ;  $P_{car} = 7.71 \text{ W}$ .]



- 5.4. (\*\*\*) Con riferimento al circuito mostrato nella figura, calcolare a) la resistenza equivalente  $R_{eq}$  della rete vista dal generatore, b) la potenza complessiva  $P$  trasferita dal generatore alla rete. Dati:  $f = 6 \text{ V}$ ;  $R = 6 \Omega$ .  
 [Risposta: a)  $R_{eq} = (2/3)R = 4 \Omega$ ; b)  $P = 9 \text{ W}$ .]



Elettromagnetismo - C. L. Ing. Aerospaziale  
 1° canale (A-K), prof. Atzeni  
 A. A. 2007-2008

Soluzioni degli esercizi del foglio n. 5

5.1

a)  $P = VI = V^2/R \rightarrow R = V^2/P = 80.7 \Omega$

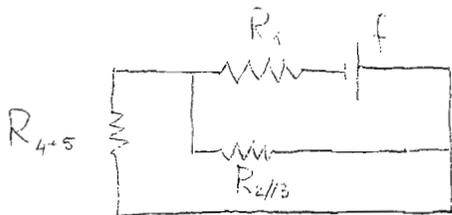
$R = R_0 [1 + \alpha (T - T_0)] \rightarrow T = T_0 + \frac{R - R_0}{\alpha R_0} = 607.6^\circ \text{C}$

b)  $P_0 = \frac{V^2}{R_0} = \frac{220^2}{22} = 2200 \text{ W}$

c)  $R_0 = \rho_0 l_0 / S \rightarrow l_0 = R_0 (\pi d^2 / 4) / \rho_0 = 77.1 \text{ m}$

5.2

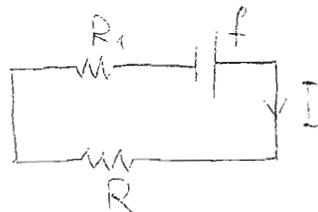
Il circuito in esame è  
 equivalente al seguente



$R_{2+3} = R_2 + R_3 = 25 \Omega$

$R_{2//3} = \frac{1}{R_2^{-1} + R_3^{-1}} = 3.33 \Omega$

e quindi a



con  $R = \left[ (R_{4+5}) // (R_{2//3}) \right] = \frac{1}{\frac{1}{R_{4+5}} + \frac{1}{R_{2//3}}} = 2.94 \Omega$

$I = f / (R + R_1) = 25 / 12 \text{ GA} = 1.03 \text{ A}$

$V_2 = V_{R_{2//3}} = V_R = IR = 1.03 \times 2.94 = 5.67 \text{ V}$

$I_4 = \frac{V_{4+5}}{R_{4+5}} = \frac{V_2}{R_{4+5}} = \frac{5.67}{25} = 0.227 \text{ A}$

5.3 a) pile in serie  $4f = (4r + R)I$   $I = 2.57 \text{ A}$

$P_{\text{perdute}} = 4fI = 92.6 \text{ W}$

$P_{\text{carico}} = RI^2 = 66.05 \text{ W}$

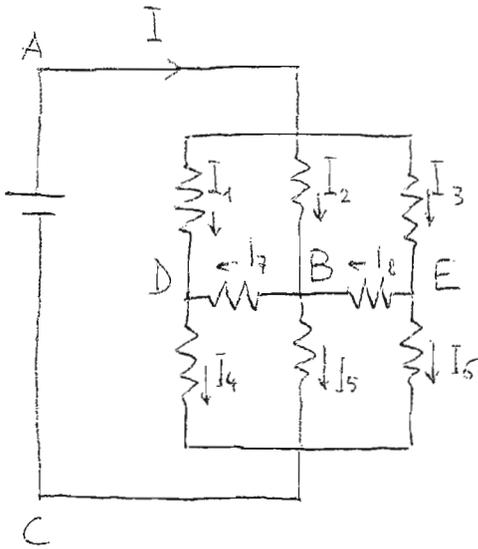
b) pile in parallelo;  $I_R = \text{corrente attraverso } R$

$f - \frac{r}{4}I_R = RI_R \rightarrow I_R = \frac{f}{R + \frac{r}{4}} = 0.872 \text{ A}$

$P_{\text{perdute}} = 4f \frac{I_R}{4} = 7.90 \text{ W}$

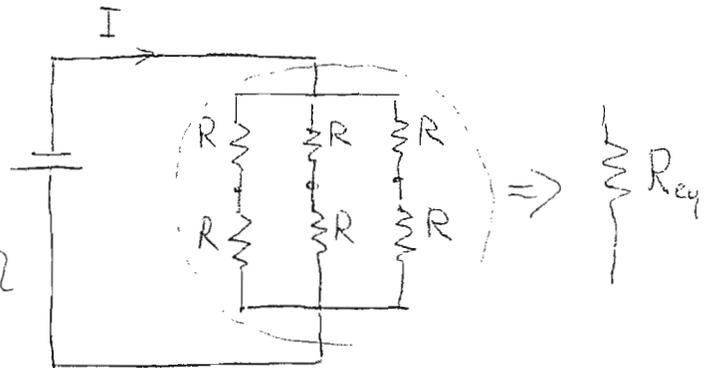
$P_{\text{carico}} = RI_R^2 = 7.71 \text{ W}$

5.4



I nodi D, B, E sono allo stesso potenziale  $\Rightarrow I_7 = 0; I_8 = 0$

Il circuito in esame equivale allora al seguente



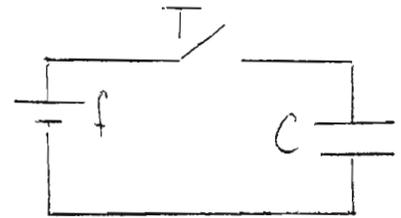
$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R}} = \frac{2}{3}R = 4\Omega$

$I = f/R_{eq} = 1.5 \text{ A}$   
 $\uparrow$   
 $4\Omega$

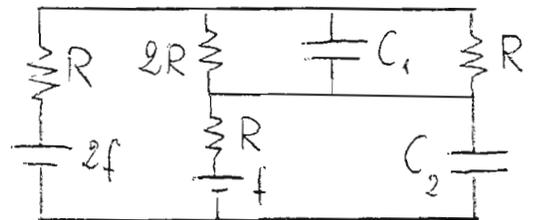
$P_{\text{trasf}} = R_{eq} I^2 = 4 \times 1.5^2 = 9 \text{ W}$

Foglio di Esercizi n. 6

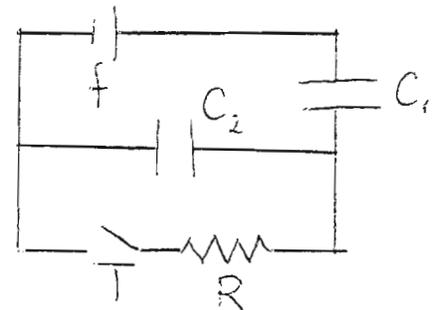
- 6.1. (\*\*) La differenza di potenziale fra le armature di un condensatore di capacità  $C$  inizialmente è  $V_0$ . A un certo istante, chiudendo il tasto  $T$ , il condensatore viene collegato a un generatore di forza elettromotrice  $f > V_0$ . Per raggiungere la nuova condizione di equilibrio il generatore compie un lavoro  $L$ . Ricavare le espressioni della quantità di carica  $\Delta q$  fornita dal generatore al condensatore e il valore di  $V_0$  in funzione di  $f$ ,  $C$  e  $L$ . [Risposta:  $\Delta q = L/f$ ;  $V_0 = f - L/(Cf)$ .] (Es. n. 2 della prova scritta di Fisica Generale II del 21.10.2000)



- 6.2. (\*\*) Il circuito in figura è in regime stazionario. I due generatori sono ideali. Calcolare il rapporto  $Q_1/Q_2$  fra le cariche di  $C_1$  e  $C_2 = 2C_1$ . [Risposta:  $Q_1/Q_2 = 1/11$ .] (Es. n. 2 della prova scritta di Fisica Generale II del 28.1.1997)



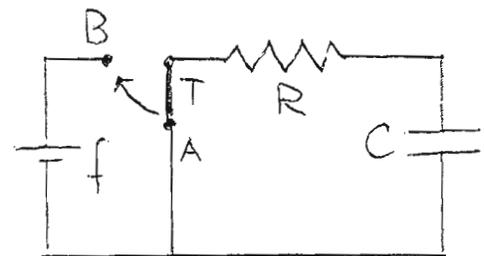
- 6.3. (\*\*) Nel circuito in figura, nel quale è trascurabile la resistenza interna del generatore, a partire dalla situazione di regime con l'interruttore  $T$  aperto, a un certo istante viene chiuso  $T$ . Ricavare l'espressione dell'energia  $U_{gen}$  erogata dal generatore dalla chiusura dell'interruttore fino al raggiungimento della nuova condizione di equilibrio.



[Risposta:  $U_{gen} = (fC_1)^2/(C_1 + C_2)$ .]

(Es. n. 3 della prova scritta di Fisica Generale II del 12.2.1999)

- 6.4. (\*\*) Nel circuito in figura il condensatore è scarico quando, a  $t = 0$ , il tasto  $T$  viene spostato dalla posizione  $A$  a quella  $B$ . Dopo un intervallo di tempo  $\Delta T$  il tasto viene riportato nella posizione  $A$ . Calcolare il valore della differenza di potenziale ai capi di  $C$  agli istanti  $t = \Delta T/2$  e  $t = 3\Delta T/2$ . Dati:  $C = 3 \mu\text{F}$ ,  $R = 2 \text{ k}\Omega$ ,  $\Delta T = 4 \text{ ms}$ ,  $f = 20 \text{ V}$ .



[Risposta:  $V(t = \frac{\Delta T}{2}) = f(1 - e^{-1/3}) = 5.7 \text{ V}$ ;

$V(t = \frac{3\Delta T}{2}) = f(1 - e^{-2/3})e^{-1/3} = 6.9 \text{ V}$ .]

(Es. n. 2 della prova scritta di Fisica Generale II del 14.9.2000)

Soluzioni degli esercizi del foglio n. 6

e.1  $L = f \Delta q \quad (*) \Rightarrow \Delta q = \frac{L}{f}$

$$\frac{L}{f} = C f - C V_0$$

$$V_0 = f - \frac{L}{C f}$$

$$\Delta q = q_{fu} - q_{fo}$$

$$\frac{L}{f} = C f - C V_0$$

(\*) Si ricordi che, per definizione, la  $f$  è un. di un generatore è l'energia che viene trasformata in energia elettrica per unità di carica che passa all'interno del generatore stesso.

6.2

$$\frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R}} = \frac{2}{3} R$$

$$2f - f = (R + \frac{2}{3}R + R) I \Rightarrow I = \frac{3}{2} \frac{f}{R}$$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{C_1 V_1}{C_2 V_2} = \frac{C_1 \frac{2}{3} R I}{C_2 (f + R I)} = \frac{C_1 \frac{2}{3} R \frac{3}{2} \frac{f}{R}}{2 C_2 \frac{f + \frac{3}{2} f}{2}} = \frac{1}{11}$$

6.3

iniziale

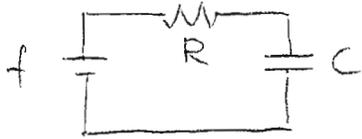
$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

finale

$$q_{fu} = C_1 f$$

(\*)  $V_{gen} = f \Delta q = f (q_{fu} - q_{iniz}) = f (C_1 f - C_{eq} f) = f^2 \frac{C_1^2}{C_1 + C_2}$

6.4. quando  $T$  è nella posizione B



$$RC = 6 \times 10^{-3} \text{ s}$$

$$f = 20 \text{ V}$$

- (1)  $0 < t < \Delta T$   $V_c = f (1 - e^{-t/RC})$
- (2)  $t = \Delta T$   $V_c(\Delta T) = f (1 - e^{-\Delta T/RC})$
- (3)  $t \geq \Delta T$   $V_c = [V_c(\Delta T)] e^{-(t-\Delta T)/RC}$

$$t = \frac{\Delta T}{2} = 2 \text{ ms}$$

$$V\left(\frac{\Delta T}{2}\right) = f (1 - e^{-1/3}) = 5.7 \text{ V}$$

$$t = \frac{3}{2} \Delta T = 6 \text{ ms}$$

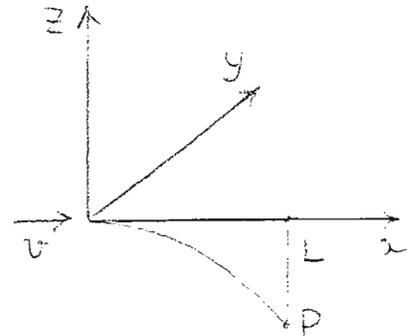
$$V\left(\frac{3}{2} \Delta T\right) = f (1 - e^{-2/3}) e^{-1/3} = 6.9 \text{ V}$$

Elettromagnetismo - C. L. Ing. Aerospaziale  
1° canale (A-K), prof. Atzeni  
A. A. 2007-2008

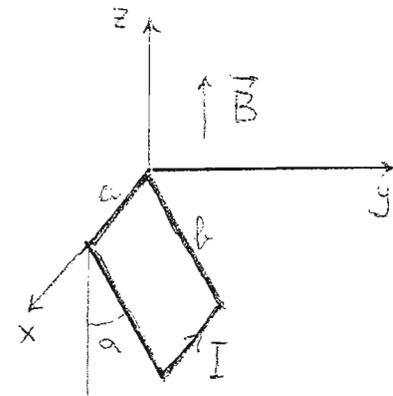
Foglio di Esercizi n. 7

- 7.1. (\*\*) Un recipiente cilindrico di raggio interno  $r = 2$  cm è immerso in un campo di induzione magnetica uniforme  $B_0$  con le linee di forza parallele all'asse del cilindro stesso. Un elettrone ( $m = 9 \times 10^{-31}$  kg) viene emesso da una sorgente posta sull'asse del cilindro con velocità puramente radiale, di modulo  $v = 5 \times 10^7$  m/s. Determinare il valore minimo di  $B_0$  che impedisce all'elettrone di arrivare sulla parete del cilindro. [Risposta:  $B_0 > B_{0\min} = 2mv/(|q|r) = 0.028$  T.] (Es. n. 2 della prova scritta di Fisica Generale II del 16.4.1998)

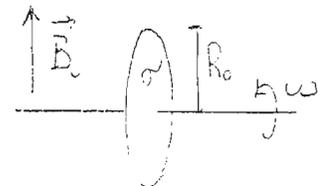
- 7.2. (\*\*) Con riferimento alla figura, un elettrone con energia cinetica  $\mathcal{E}$ , che si muove lungo l'asse  $x$ , entra in una regione  $0 \leq x \leq L$  in cui è presente un campo di induzione magnetica  $\mathbf{B} = (0, B, 0)$ . Determinare a) la coordinata  $z_P$  del punto  $P$  della traiettoria dell'elettrone per cui  $x = L$ ; b) il valore delle tre componenti cartesiane della velocità nello stesso punto  $P$ . (Dati: massa dell'elettrone  $m = 9.1 \times 10^{-31}$  kg;  $\mathcal{E} = 10.24$  keV;  $L = 10$  cm;  $B = 1.7 \times 10^{-3}$  T. Utilizzare l'equivalenza  $1$  eV  $= 1.6 \times 10^{-19}$  J)  
[Risposte: a)  $z_P = -2.69$  cm; b)  $v_x = 5.2 \times 10^7$  m/s;  $v_y = 0$ ;  $v_z = -3 \times 10^7$  m/s.]



- 7.3. (\*\*) Una spira rettangolare rigida, di lati  $a = 10$  cm e  $b = 20$  cm, massa  $m = 2$  g e densità lineica di massa uniforme, percorsa da una corrente  $I$ , può ruotare attorno ad un asse orizzontale (vedi figura). Determinare il valore di  $I$  sapendo che in una regione di campo di induzione  $B = 0.01$  T uniforme e verticale la spira si trova in condizioni di equilibrio in un piano che forma un angolo  $\alpha = 30^\circ$  con la verticale.  
[Risposta:  $I = mg \tan \alpha / 2aB = 5.66$  A.]



- 7.4. (\*\*) Con riferimento alla figura, un sottile disco di plastica, di raggio  $R_0$ , è carico con densità superficiale di carica  $\sigma$  costante e uniforme, e viene mantenuto in rotazione attorno al proprio asse con velocità angolare  $\omega$  costante. Esso è immerso in un campo di induzione magnetica  $\mathbf{B}_0$  costante e uniforme, perpendicolare all'asse di rotazione. Si determini il modulo  $M$  del momento meccanico (causato dall'interazione fra campo magnetico e corrente) che agisce sul disco.



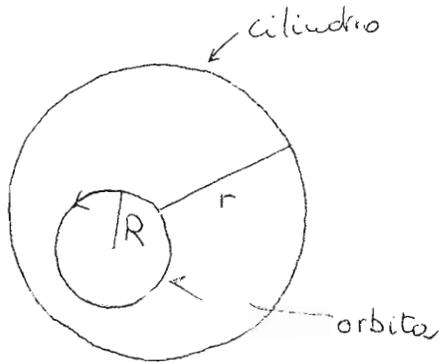
(Si suggerisce di considerare la superficie del disco costituita da infinite corone circolari di spessore infinitesimo. A causa della rotazione del disco, ciascun anello, visto da un sistema di riferimento fisso, equivale ad una spira in cui circola corrente.)

[Risposta:  $M = \frac{\pi}{4} \sigma \omega B_0 R_0^4$ ] (Es. n. 3 della prova scritta di Fisica Generale II del 14.6.2000)

Elettromagnetismo - C. L. Ing. Aerospaziale  
 1° canale (A-K), prof. Atzeni  
 A. A. 2007-2008

Soluzioni degli esercizi del foglio n. 7

7.1

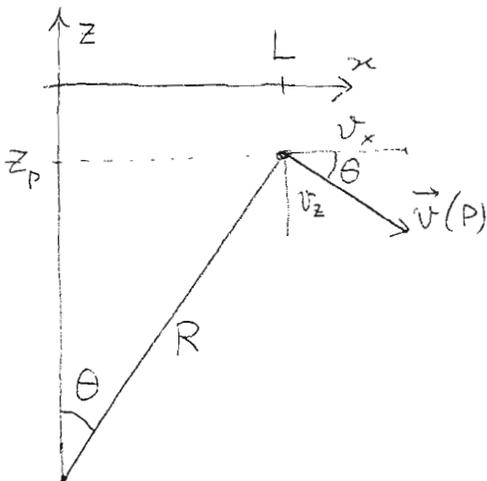


forza di Lorentz

$$\frac{mv^2}{R} = |q|vB_0 \Rightarrow R = \frac{mv}{|q|B_0}$$

$$2R < r \Rightarrow B_0 > \frac{2mv}{|q|r} = 0.028 \text{ T}$$

7.2



$$R = \frac{mv}{|q|B}, \text{ come nell'es. precedente}$$

$$v = \sqrt{2E/m} = 6 \times 10^7 \text{ m/s}; \quad R = 0.2 \text{ m}$$

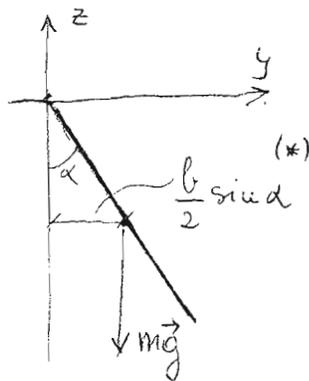
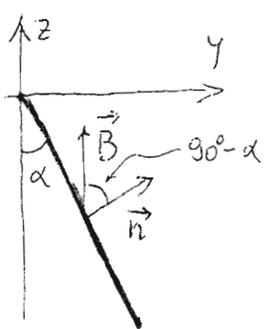
$$\theta = \arcsin \frac{L}{R} = 30^\circ$$

$$z_p = -(R - R \cos \theta) = -R(1 - \cos \theta) = -2.69 \text{ cm}$$

$$v_x = v \cos \theta = 5.2 \times 10^7 \text{ m/s}$$

$$v_y = 0; \quad v_z = -v \sin \theta = -3 \times 10^7 \text{ m/s}$$

7.3



equilibrio:  $|\vec{M}_B| = |\vec{M}_{\text{peso}}|$   
 $|\vec{m} \times \vec{B}| = iabB \sin(90^\circ - \alpha)$   
 $\downarrow mg \frac{l}{2} \sin \alpha$

$$IaB \cos \alpha = \frac{l}{2} \sin \alpha mg$$

$$I = \frac{mg}{2aB} \tan \alpha = 5.66 \text{ A}$$

$$7.4 \quad |\vec{M}| = \left| \int d\vec{M} \right| = \left| \int d\vec{m} \times \vec{B}_0 \right| = \int dm B_0$$

$\uparrow$  per ciascuna "spira" elementare in cui si suddivide il disco     
  $\uparrow$  per tutti le spire

perché  $\vec{dm} \perp \vec{B}_0$

"spira" elementare = corona circolare con raggio compreso fra  $r$  e  $r+dr$

in una spira circolare corrente  $di = \frac{dq}{dt} = \frac{\sigma \cdot 2\pi r dr}{T} = \sigma \omega r dr$

$$d\vec{m} = di \cdot S \vec{n}$$

$\uparrow$  sezione della spira  
( $S = \pi r^2$ )

$\uparrow$  periodo di rotazione ( $T = 2\pi/\omega$ )

$$dm = di \cdot \pi r^2$$

$$|\vec{M}| = \int_0^{R_0} \sigma \omega r \pi r^2 B_0 dr = \sigma \omega \pi B_0 \frac{R_0^4}{4}$$

**Elettromagnetismo - C. L. Ing. Aerospaziale**  
**1° canale (A-K), prof. Atzeni**  
**A. A. 2007-2008**

**Foglio di Esercizi n. 8**

8.1. (\*\*) Una corrente  $I = 50$  mA scorre all'interno di un filo conduttore sagomato a forma di triangolo equilatero con lati di lunghezza  $l = 20$  cm, posto nel piano  $z = 0$ . Ricavare direzione, verso e modulo dell'induzione magnetica al centro del triangolo.

[Risposta:  $B_x = B_y = 0$ ;  $B_z = (9\mu_0 I)/(2\pi l) = 4.45 \times 10^{-7}$  T.]

(Es. n. 3 della prova scritta di Fisica Generale II del 14.9.2000)

8.2. (\*\*) Dati due fili rettilinei indefiniti, paralleli all'asse  $x$ , distanti fra loro  $d$  e percorsi dalla stessa corrente  $I$ , concorde all'asse  $x$ ,

a) determinare l'espressione dell'induzione magnetica  $\mathbf{B}_0$  lungo l'asse dei due fili (asse  $z$  in figura);

b) in quale punto di tale asse il modulo di  $\mathbf{B}_0$  assume valore massimo?

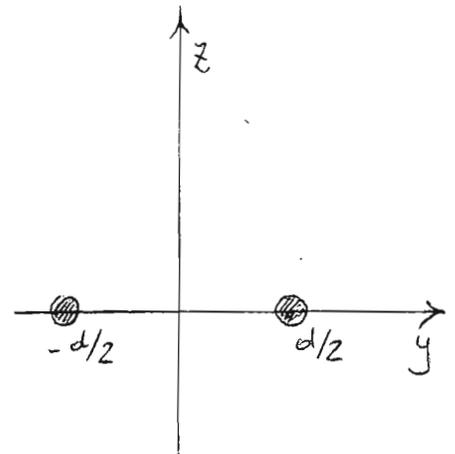
c) Calcolare tale valore massimo.

[Risposta: a)  $\mathbf{B}_0(x, y = 0, z) \equiv (0, B_y, 0)$ , con

$$B_y = -\frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{z}{z^2 + (d^2/4)};$$

b)  $|B_y|$  è massimo per  $z = \pm d/2$ ;

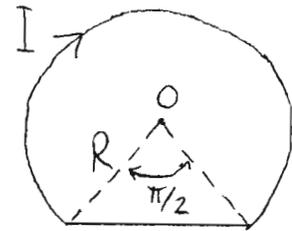
c)  $|B_y(x, x = 0, z \pm \frac{d}{2})| = \mu_0 I / \pi d$ .]



8.3. (\*\*) Un sottile filo conduttore è sagomato (vedi figura) in modo da formare un arco di circonferenza di centro  $O$ , raggio  $R$  ed angolo al centro di  $3\pi/2$  radianti, raccordato ad un tratto rettilineo che chiude il circuito. Nel circuito, posto nel vuoto, scorre una corrente stazionaria  $I$ . Ricavare l'espressione del campo di induzione magnetica  $\mathbf{B}_0$  nel punto  $O$ .

[Risposta:  $\mathbf{B}_0(O)$  è normale al piano della spira ed entrante nel foglio; il suo modulo vale  $B_0(O) = \frac{\mu_0 I}{R} \left( \frac{3}{8} + \frac{1}{2\pi} \right)$ ]

(Es. n. 3 della prova scritta di Fisica Generale II del 13.2.1997, II turno)

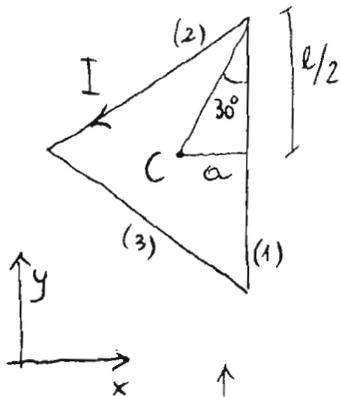


8.4. (\*\*) In un solenoide rettilineo, da pensarsi infinitamente lungo, con  $n$  di spire per unità di lunghezza, circola una corrente elettrica  $I$ . Sull'asse del solenoide si trova un filo conduttore indefinito, percorso da una corrente  $I_f = I$ . Le linee di forza del campo di induzione magnetica  $\mathbf{B}_0$  all'interno del solenoide sono elicoidali. Si determini l'espressione del passo  $p$  dell'elica in funzione della distanza  $R$  dall'asse del solenoide.

[Risposta:  $p = 4\pi^2 n R^2$ ]

Soluzioni degli esercizi del foglio n. 8

8.1

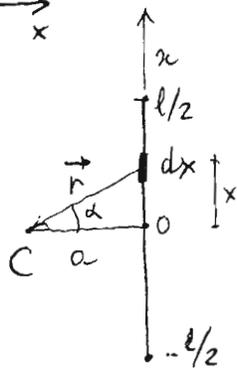


$$a = \frac{l}{2} \tan 30^\circ = \frac{l}{2\sqrt{3}}$$

$\vec{B}$  è diretto ortogonalmente al piano della spira, uscente se la corrente circola come in figura.

$$B_x = B_y = 0 ; \quad B_z(c) = 3 \underbrace{B_z^{(1)}(c)}$$

induzione generata dal filo (1)



$$r = a / \cos \alpha$$

$$x = a \tan \alpha$$

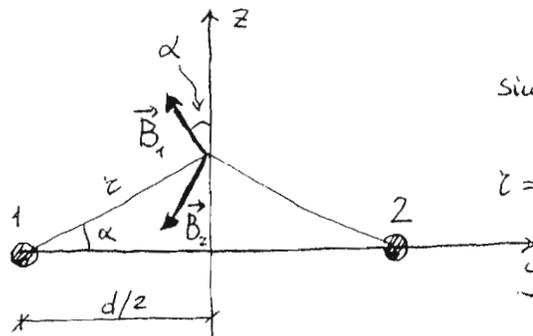
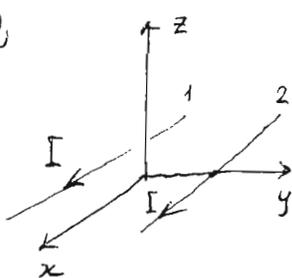
$$dx = a \sec^2 \alpha d\alpha$$

$$B_z^{(1)}(c) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{lato (1)}} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{dx r \sin(\pi/2 - \alpha)}{r^3} =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{(a / \cos^2 \alpha) d\alpha \cos \alpha}{(a / \cos \alpha)^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} [\sin \alpha]_{-\pi/3}^{\pi/3} = \frac{3}{2} \frac{\mu_0 I}{\pi l}$$

$$B_z(c) = 3 B_z^{(1)}(c) = \frac{9 \mu_0 I}{2\pi l} = 4.45 \times 10^{-7} \text{ T}$$

8.2



$$\sin \alpha = \frac{z}{r}$$

$$r = \sqrt{z^2 + d^2/4}$$

$$\vec{B}(x, y=0, z) = (0, 2B_y, 0)$$

$$a) \quad B_y(x, y=0, z) = -\frac{2\mu_0 I}{2\pi z} \sin \alpha = -\frac{2\mu_0 I}{2\pi} \frac{z}{z^2} = -\frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{z}{(z^2 + d^2/4)}$$

$$b) \quad \frac{dB_y(x, y=0, z)}{dz} = 0 \quad -\frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{z^2 + d^2/4 - 2z^2}{(z^2 + d^2/4)^2} = 0 \Rightarrow |B_y(x, y=0)| \text{ è max per } z = \pm \frac{d}{2}$$

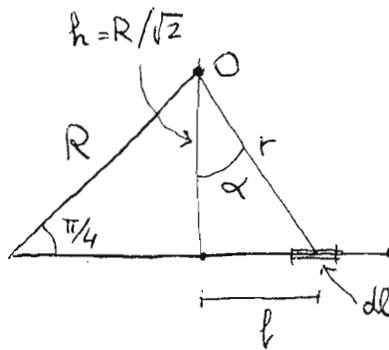
$$c) \quad |B_y(x, y=0, z = \pm \frac{d}{2})| = \frac{\mu_0 I d/2}{\pi 2 (d/2)^2} = \frac{\mu_0 I}{\pi d}$$

$$8.3 \quad \vec{B}_o(o) = \vec{B}_o(o)_{\text{(arco)}} + \vec{B}_o(o)_{\text{(segmento)}}$$

Entrambi i contributi sono normali al piano della spira, ed entranti

$$B_o(o)_{\text{arco}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{arco}} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{(R d\alpha) R}{R^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_0^{\frac{3\pi}{2}} d\alpha = \frac{3}{8} \frac{\mu_0 I}{R}$$

$$B_o(o)_{\text{segmento}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{segmento}} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{dl r \sin(\pi/2 - \alpha)}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{(h d\alpha / \cos^2 \alpha) \cos \alpha}{(h / \cos \alpha)^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi h} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi h} \sqrt{2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$



$$h = R/\sqrt{2}$$

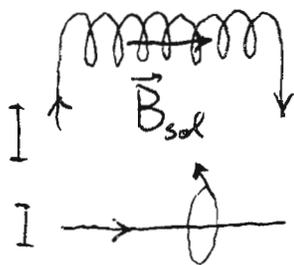
$$l = h \tan \alpha$$

$$r = h / \cos \alpha$$

$$dl = \frac{h d\alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow B_o(o) = \frac{\mu_0 I}{R} \left( \frac{3}{8} + \frac{1}{2\pi} \right)$$

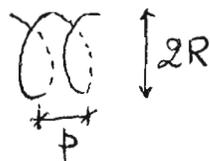
8.4



$$|B_{sol}| = \mu_0 n I$$

$$|B_{fil}| = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \quad (\text{legge di Biot-Savart})$$

$$\vec{B}_{sol} + \vec{B}_{fil}$$



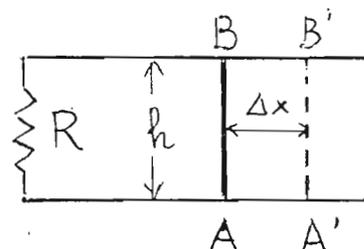
$$\frac{|B_{sol}|}{|B_{fil}|} = \frac{p}{2\pi R}$$

$$\Rightarrow p = 2\pi R |B_{sol}| / |B_{fil}| = 4\pi^2 n R^2$$

**Elettromagnetismo - C. L. Ing. Aerospaziale**  
**1° canale (A-K), prof. Atzeni**  
**A. A. 2007-2008**

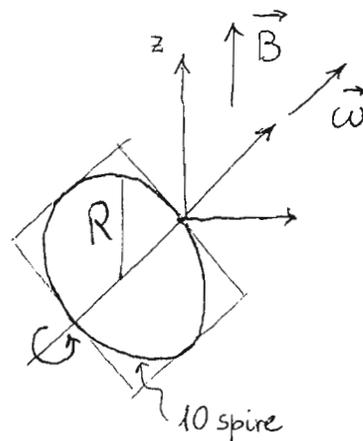
**Foglio di Esercizi n. 9**

- 9.1. (\*\*) Il circuito in figura è immerso in un campo di induzione magnetica  $\mathbf{B}_0$ , uniforme e ortogonale al piano del circuito. Il tratto di circuito  $AB$  viene portato strisciando nella posizione  $A'B'$ . Calcolare la carica che circola nel circuito a seguito di questo spostamento. Dati  $B_0 = 1$  T;  $R = 1$  k $\Omega$ ;  $h = 1$  m;  $\Delta x = 10$  cm.  
 [Risposta:  $q = B_0 h \Delta x / R = 10^{-4}$  C.]



- 9.2. (\*\*) Una spira circolare rigida di raggio  $r = 10$  cm, è costituita da un filo di rame (resistività  $\rho = 1.7 \times 10^{-8}$   $\Omega$ m) di sezione  $S = 0.5$  mm<sup>2</sup> ed è immersa in un campo di induzione  $B = 1$  T, uniforme e normale al piano della spira. Il campo  $B$  viene poi rapidamente portato a zero. Calcolare la carica elettrica che fluisce nella spira durante il processo transitorio appena descritto.  
 [Risposta:  $q = BrS/2\rho = 1.47$  C.]

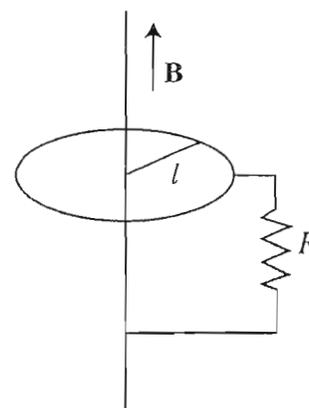
- 9.3. (\*\*) Con riferimento alla figura, una bobina piana circolare, costituita da  $N = 10$  spire di raggio  $R = 10$  cm, immersa in un campo di induzione magnetica uniforme  $B = 1$  T, ruota uniformemente (con periodo  $T_r = 0.02$  s) attorno ad un suo diametro, normale alla direzione del campo di induzione. Ricavare l'espressione della forza elettromotrice indotta nella bobina in funzione del tempo, sapendo che all'istante  $t = 0$  il piano della bobina è parallelo a  $\mathbf{B}$  (indicare il verso di percorrenza della spira scelto come positivo per definire il segno della f.e.m.)



[Risposta: scegliendo come verso positivo quello di rotazione di una vite destra che avanza nel verso positivo dell'asse  $x$ ,  $f = -f_{\max} \cos[(2\pi/T_r)t]$ , con  $f_{\max} = NB2\pi^2 R^2/T_r = 98.7$  V.]

- 9.4. (\*\*) Un circuito piano di area  $S = 10$  cm<sup>2</sup> e resistenza elettrica  $R = 20$   $\Omega$  ruota con velocità angolare costante  $\omega = 200$  rad/s in un campo di induzione magnetica costante e uniforme di modulo  $B_0 = 0.5$  T, per azione di una coppia applicata. L'asse di rotazione giace nel piano del circuito ed è perpendicolare alle linee di forza di  $\mathbf{B}$ . Calcolare il momento  $M$  della coppia applicata per mantenere la spira in rotazione. Si trascuri l'autoinduzione.  
 [Risposta:  $M = M_0 \sin^2(\omega t)\hat{\omega}$ , dove  $\hat{\omega}$  è il versore di  $\omega$  e  $M_0 = B_0^2 S^2 \omega / R = 2.5 \times 10^{-6}$  Nm. ]  
 (Es. n. 3 della prova scritta di Fisica Generale II del 5.6.1998)

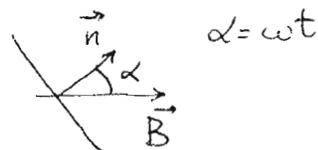
- 9.5. (\*\*) Una barretta conduttrice di lunghezza  $l = 10$  cm ruota con velocità angolare  $\omega = 100$  s<sup>-1</sup> attorno ad un asse perpendicolare alla barretta stessa e passante per un suo estremo, ed è immersa in un campo d'induzione parallelo all'asse di rotazione e di modulo  $B = 2$  T. L'altro estremo della barretta striscia su un contatto circolare. Fra un punto dell'asse ed uno del contatto circolare è inserita una resistenza  $R = 9$   $\Omega$ . Sapendo che la resistenza di barretta e contatti è  $r = 1$   $\Omega$ , calcolare a) la corrente che circola in  $R$ ; b) l'energia meccanica trasformata in energia elettrica nell'intervallo di tempo in cui nel circuito passa una carica  $q = 1$   $\mu$ C. [Risposta: a)  $i = \omega Bl^2/[2(r + R)] = 0.1$  A; b)  $E = 1$   $\mu$ J.]



$$9.4 \quad i = -\frac{1}{R} \frac{d\phi}{dt} = -\frac{1}{R} \frac{d}{dt} (B_0 S \cos \omega t) = \frac{B_0 S \omega \sin \omega t}{R}$$

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}_0 = i S \vec{n} \times \vec{B}_0 = (i S B_0 \sin \omega t) \hat{\omega} =$$

$$= \underbrace{(B_0^2 S^2 \omega / R)} \sin^2 \omega t \hat{\omega} \rightarrow 2.5 \times 10^{-6} \text{ Nm}$$



9.5

A causa della rotazione della barretta, una carica  $q$  su di essa è soggetta alla forza di Lorentz, diretta lungo la barretta stessa e di modulo pari a  $F = qvB$ ; ad essa corrisponde un campo elettrico  $E = vB = \omega rB$ . Sulla barretta si induce quindi una forza elettromotrice

$$f_i = \int_{\text{barretta}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^l \omega r B dr = \frac{\omega B l^2}{2} = \frac{100 \times 2 \times 10^{-2}}{2} = 1 \text{ V.}$$

a) Per la legge di Ohm, nel circuito di resistenza  $r + R$  circola una corrente

$$I = \frac{f_i}{r + R} = \frac{1}{1 + 9} = 0.1 \text{ A.}$$

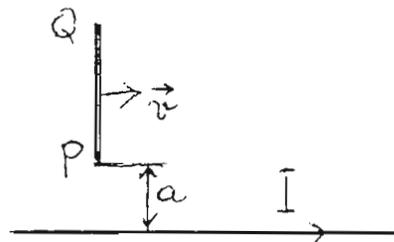
b) L'energia meccanica trasformata in energia elettrica è pari al lavoro compiuto dalla forza elettromotrice; si ha quindi

$$E = L = f_i q = 1 \times 10^{-6} = 1 \mu\text{J.}$$

**Elettromagnetismo - C. L. Ing. Aerospaziale**  
**1° canale (A-K), prof. Atzeni**  
**A. A. 2007-2008**

**Foglio di Esercizi n. 10**

- 10.1. (\*\*) Una sbarretta conduttrice  $PQ$ , di lunghezza  $L$ , si muove di moto traslatorio con velocità costante  $\mathbf{v}$ , mantenendosi perpendicolare ad un filo rettilineo percorso da una corrente stazionaria  $I$ . Sia  $a$  la distanza dell'estremo  $P$  della barretta dal filo. Ricavare l'espressione della differenza di potenziale  $\Delta V$  che si stabilisce fra gli estremi della sbarretta.



[Risposta:  $\Delta V = \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln\left(\frac{a+L}{a}\right)$ .]

(Es. n. 4 - Fisica II per Ing. Civ. del 16.11.2001.)

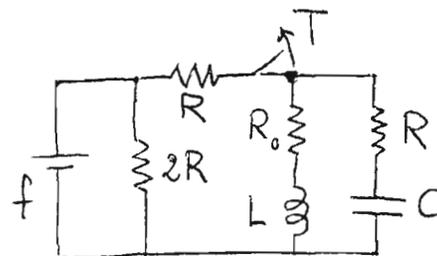
- 10.2. (\*\*) Una spira circolare di raggio  $a = 1$  cm è percorsa da una corrente  $i = i_0 \cos(\omega t)$ , dove  $\omega = 10^4$  rad/s e  $i_0 = 1$  A. Ricavare l'espressione della corrente indotta in una seconda spira, di raggio  $b = 1$  m, complanare e concentrica con la prima, e avente una resistenza  $R = 1 \Omega$ . Calcolare inoltre il valore numerico della corrente stessa al tempo  $t = \pi/(2\omega)$ .

(Suggerimenti: a) per calcolare il flusso concatenato con la spira di raggio  $b$ , utilizzare il coefficiente di mutua induzione fra i due circuiti; b) per calcolare quest'ultimo, notare che, essendo  $a \ll b$ , possiamo considerare costante, e pari al valore al centro della spira, il campo generato nel cerchio delimitato dalla spira di raggio  $a$  da una corrente che circola nella spira di raggio  $b$ .)

[Risposta: a)  $i_{i(b)}(t) = i_0 \omega \mu_0 \frac{\pi a^2}{2bR} \sin(\omega t)$ ; b)  $i_{i(b)}(t = \frac{\pi}{2\omega}) = 2 \mu\text{A}$ .]

(Es. n. 4 della prova scritta di Fisica Generale II del 16.4.1998)

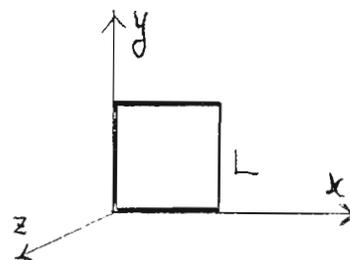
- 10.3. (\*\*) Il circuito in figura è in condizioni stazionarie quando viene aperto l'interruttore  $T$ . Sapendo che nel transitorio che segue l'apertura dell'interruttore, sulla resistenza  $R_0$  viene dissipata un'energia  $E$ , calcolare la capacità  $C$  del condensatore. Dati:  $E = 2.5 \times 10^{-5}$  J;  $f = 20$  V;  $R = R_0 = 50 \Omega$ ;  $L = 10^{-3}$  H.



[Risposta:  $C = (16E/f^2) - (L/R^2) = 0.6 \mu\text{F}$ .]

(Es. n. 3 della prova scritta di Fisica Generale II del 15.6.1998)

- 10.4. (\*\*) Un'onda elettromagnetica piana, polarizzata linearmente, si propaga nel vuoto, con lunghezza d'onda  $\lambda = 20$  cm e campo di induzione magnetica descritto, in un riferimento cartesiano, da  $B_z = B_0 \cos(kx - \omega t)$ , dove  $t$  è il tempo e  $B_0 = 1$  nT. Si chiedono il valore massimo e l'andamento temporale della corrente indotta in una spira quadrata di lato  $L = \lambda/2$ , disposta nel piano  $x-y$  come indicato in figura, e avente resistenza  $R = 60 \Omega$ .



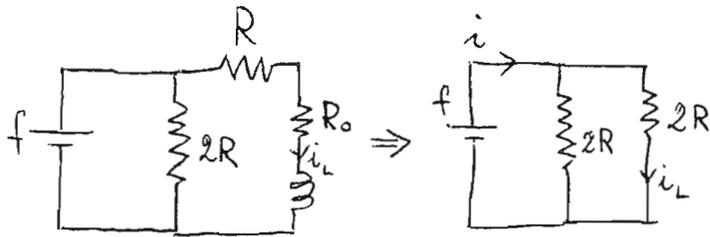
[Risposta:  $i_{\max} = B_0 c \lambda / R = 1$  mA;  $i = -i_{\max} \cos(\omega t)$ ; c: velocità della luce.]

(Es. A.3 della prova scritta di Elettromagnetismo del 5.12.2001.)

10.3

a interruttore chiuso, in condiz. stazionarie

Energia immagazzinata in L e C :  $E_{TOT} = \frac{1}{2} L i_L^2 + \frac{1}{2} C V_C^2$



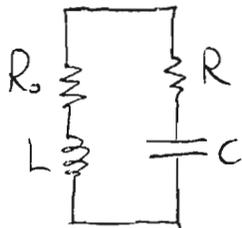
corrente in L

d.d.p. ai capi di C

$$\Rightarrow i_L = \frac{i}{2} = \frac{f}{2R}$$

$$V_C = f - R i_R = \frac{f}{2}$$

a interruttore chiuso



con  $R = R_0 \Rightarrow E_{dissipata} = E_{TOT} = 2E$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2} E_{TOT} = \frac{1}{16} f^2 \left( \frac{L}{R^2} + C \right)$$

$$C = \frac{16E}{f^2} - \frac{L}{R^2} = 6 \times 10^{-7} \text{ F} = 0.6 \mu\text{F}$$

10.4

Per la legge di Faraday-Neumann-Leuz

$$f_i = - \frac{d\phi(B)}{dt} ; i_i = \frac{f_i}{R}$$

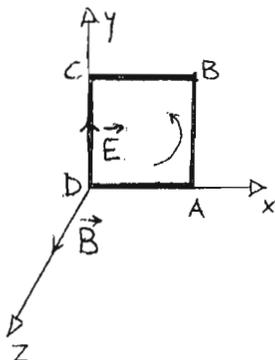
$$\phi(B) = L \int_0^{L=\lambda/2} B_0 \cos(kx - \omega t) dx = \frac{L B_0}{k} \left[ \sin(kx - \omega t) \right]_0^{\lambda/2} =$$

$$= \frac{L B_0}{k} \left[ \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{2} - \omega t\right) - \sin(-\omega t) \right] = \frac{2 L B_0}{k} \sin \omega t = \frac{\lambda B_0}{k} \sin \omega t$$

$$f_i = - \lambda B_0 \frac{\omega}{k} \cos \omega t = - \lambda B_0 c \cos \omega t$$

$$i_i = \frac{f_i}{R} = - i_{max} \cos \omega t, \text{ con } i_{max} = B_0 c \lambda / R = 1 \text{ mA}$$

Soluzione alternativa :  $f_i = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \vec{E} = E_y \hat{j} = B_z c \hat{j} = B_0 c \cos(kx - \omega t) \hat{j}$



quindi  $f_i = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_C^D \vec{E} \cdot d\vec{l} = L E_y(x = \frac{\lambda}{2}) - L E_y(x = 0) =$

$$= L B_0 c \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{2} - \omega t\right) - L B_0 c \cos(-\omega t) =$$

$$= L B_0 c [-\cos(\omega t) - \cos \omega t] = - \lambda B_0 c \cos \omega t,$$

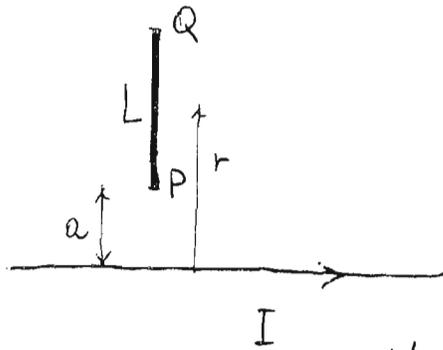
↑  
 $\lambda/2$

etc

Elettromagnetismo - C. L. Ing. Aerospaziale  
 1° canale (A-K), prof. Atzeni  
 A. A. 2007-2008

Soluzioni degli esercizi del foglio n. 10

10.1



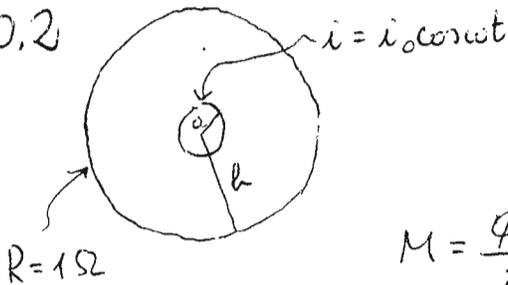
$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (\text{Biot e Savart})$$

$$F = qvB(r)$$

$$\vec{E}(r) = \frac{F}{q} = vB(r)$$

$$\Delta V = |V(Q) - V(P)| = \left| \int_a^{a+L} E(r) dr \right| = \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln\left(\frac{a+L}{a}\right)$$

10.2



$$i_c(t) = -\frac{1}{R} \frac{d\phi_b}{dt} = -\frac{1}{R} M \frac{di}{dt} = i_0 \frac{\omega}{R} M \sin \omega t$$

$$M = \frac{\phi_a}{i_c}$$

flusso concatenato con  $a$ , causato da una corrente  $i_c$  in  $b$

$$M \approx \frac{\pi a^2 \left( \frac{\mu_0 i_c}{2b} \right)}{i_c} = \mu_0 \frac{\pi a^2}{2b}$$

valore di  $|\vec{B}|$  al centro della spira. Poiché  $a \ll b$  posso supporre  $\approx$  costante all'interno della spira "a"

Quindi  $i_c(t) = \boxed{i_0 \omega \mu_0 \frac{\pi a^2}{2bR}} \sin \omega t \rightarrow 2 \mu A$

$$i_c(t) \left( t = \frac{\pi}{2\omega} \right) = \frac{i_0 \omega \mu_0 \pi a^2}{2bR} = 2 \mu A$$

# Elettromagnetismo - C. L. Ing. Aerospaziale

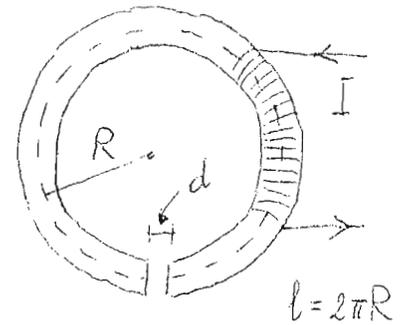
1° canale (A-K), prof. Atzeni

A. A. 2005-2006

## Foglio di Esercizi n. 11

- 11.1. (\*\*) Un elettromagnete toroidale (vedi figura) è costituito da un nucleo di ferro (con  $\mu_r = 5000$ , costante), di lunghezza (media)  $l = 1$  m e sezione circolare di area  $S = 100$  cm<sup>2</sup>, e da un avvolgimento di  $N = 1000$  spire, attraverso cui scorre una corrente  $I$ . Calcolare
- il valore di  $I$  affinché nel traferro di spessore  $d = 2$  cm si abbia un campo di induzione magnetica  $B = 1$  T;
  - la potenza dissipata nell'avvolgimento, sapendo che esso è costituito da un filo di rame di raggio  $r = 0.5$  mm e resistività  $\rho = 1.7 \times 10^{-8}$   $\Omega$ m.

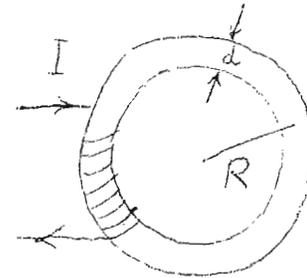
[Risposta: a)  $I = 16.1$  A; b)  $P = 1990$  W.]



- 11.2. (\*\*) Su un anello di ferro di raggio medio  $R = 20$  cm, (con  $d \ll R$ , vedi figura), sono avvolte  $N = 100$  spire. Si determini la permeabilità relativa del ferro, sapendo che l'intensità di magnetizzazione è  $M = 2 \times 10^5$  Aspire/m e che nelle spire scorre una corrente  $I = 0.5$  A.

[Risposta:  $\mu_r = 1 + [(2\pi MR)/(NI)] \simeq 5000$ .]

(Es. n. 3 della prova scritta di Fis. Gen. II del 21.10.2000)



- 11.3. (\*\*) Su un anello di ferro a forma di toro, con raggio mediano  $R = 10$  cm e sezione circolare, sono avvolte  $N = 314$  spire, in cui circola una corrente continua  $I = 2$  A. Calcolare l'intensità di magnetizzazione nell'anello, sapendo che la permeabilità relativa del ferro è  $\mu_r = 1000$ .

[Risposta:  $M = (\mu_r - 1)NI/(2\pi R) = 10^6$  Aspire/m]

(Es. A.2 della prova scritta di Elettromagnetismo del 18.12.2001)

Elettromagnetismo - C. L. Ing. Aerospaziale  
1° canale (A-K), prof. Atzeni  
A. A. 2007-2008

Soluzioni degli esercizi del foglio n. 11

11.1 Per la legge di Hopkinson  $NI = \mathcal{R} \phi$   $\phi \approx BS$

$$\mathcal{R} = \text{reluttanza} = \mathcal{R}_{\text{magnete}} + \mathcal{R}_{\text{traferro}} = \frac{l}{\mu_0 \mu_r S} + \frac{d}{\mu_0 S}$$

$$I = \frac{\mathcal{R} BS}{N} = \frac{Bl}{N \mu_0 \mu_r} \left(1 + \frac{d}{l} \mu_r\right) = 16.1 \text{ A}$$

$$P_{\text{Joule}} = \mathcal{R} I^2 = \int_{S_{\text{filo}}} \frac{l_{\text{filo}}}{S_{\text{filo}}} I^2 = \int \frac{2\pi \left(\frac{S}{\pi}\right)^{1/2} N}{\pi r^2} I^2 \approx 1990 \text{ W}$$

11.2.  $\vec{M} = (\mu_r - 1) \vec{H} \Rightarrow \mu_r = 1 + (M/H)$

Si applica il teorema della circuitazione:  $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI$ ,

da cui  $H \cdot 2\pi R = NI \Rightarrow H = NI / 2\pi R$

$$\mu_r = 1 + \frac{2\pi MR}{NI} \approx 5000$$

11.3 Le relazioni  $B = \mu_0 (H + M)$  e  $B = \mu_r \mu_0 H$ ,  
consentono di scrivere

$$M = (\mu_r - 1) H. \quad (1)$$

Inoltre, dal teorema della circuitazione,  $NI = Hl$ ,  
abbiamo  $H = NI/l = NI / 2\pi R$ , che sostituito nell'Eq. (1)  
conduce all'espressione finale

$$M = (\mu_r - 1) \frac{NI}{2\pi R} \approx 10^6 \text{ Aspire/m}$$