Flussi Di Fanno

1 Definizione del flusso di Fanno

Si consideri un flusso adiabatico all'interno di un condotto a sezione costante, in presenza di attrito e senza scambio di lavoro con l'esterno. Tale regime di moto è detto flusso di Fanno.

Con tali ipotesi:

- moto 1D (sezione costante)
- presenza di fenomeni di attrito
- flusso adiabatico
- assenza di scambio di lavoro con l'esterno
- gas perfetto (termicamente e caloricamente)
- moto stazionario

un flusso può essere descritto per mezzo delle equazioni di governo così scritte:

$$\begin{cases} d(\rho u) = 0 & \Longrightarrow \text{conservazione della massa} \\ dp + \rho u \cdot du + \dfrac{1}{2}\rho u^2 \left(\dfrac{f \cdot dx}{D_i}\right) = 0 & \Longrightarrow \text{bilancio della quantità di moto} \\ dh_0 = 0 & \Longrightarrow \text{conservazione dell'energia} \end{cases}$$

Il flusso di Fanno è un regime di moto in cui la portata per unità d'area ($G = \rho u$) e l'entalpia totale ($h_0 = h + \frac{u^2}{2}$) si mantengono costanti.

Il termine $\frac{1}{2}\rho u^2 \left(\frac{f \cdot dx}{D_i}\right)$ rappresenta la forza di attrito (per unità d'area del condotto) che si esercita sulle pareti del condotto e che si oppone al moto del fluido, ove f è il coefficiente di attrito di Darcy e D_i è il diametro idraulico del condotto.

Infatti, considerato un tratto dx di un condotto di sezione A di forma generica, gli sforzi di taglio a parete τ_w concorrono a generare la forza di attrito (per unità d'area):

$$\tau_w \frac{C}{A} dx$$

ove C è il perimetro della sezione del condotto.

Il coeficiente di attrito di Darcy è definito attraverso la relazione:

$$f = \frac{4\tau_w}{\frac{1}{2}\rho u^2}$$

e il diametro idraulico attraverso la relazione:

$$D_i = \frac{4A}{C}$$

Quindi, la forza di attrito per unità d'area che si esercita lungo il tratto dx di condotto è:

$$\frac{1}{2}\rho u^2 \left(\frac{f \cdot dx}{D_i} \right)$$

Il fattore di attrito f è un numero adimensionale che dipende da numero di Reynolds ($Re = \frac{\rho u D_i}{\mu}$) e dalla rugosità relativa delle pareti del condotto. L'andamento del fattore di attrito viene riportato nei diagrammi di Moody:

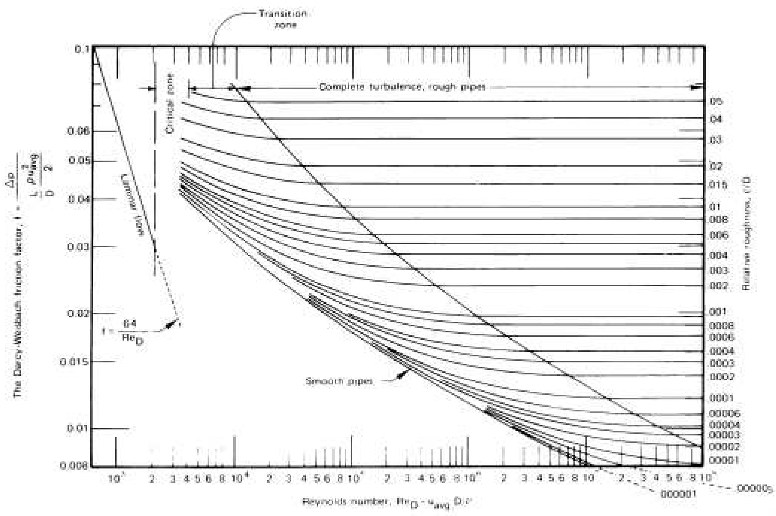

Figura 1: Diagramma di Moody

Nel caso di flusso laminare ($Re < 2300$) f è funzione del solo numero di Reynolds, mentre nel caso turbolento è funzione sia di Re che della rugosità relativa. In particolare, per elevati numeri di Reynolds ($Re > 10^6$) il coefficiente di attrito è solo funzione (crescente) della rugosità relativa.

2 Comportamento del flusso

Nel seguito verrà mostrato il comportamento del flusso di Fanno. Per mostrare ciò, le equazioni di conservazione della massa e dell'energia e la definizione del numero di Mach ($M = \frac{u}{a}$), verranno scritte in forma di derivata logaritmica:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{u} + \dfrac{d\rho}{\rho} = 0 \\ \dfrac{dp}{p} + \dfrac{d\rho}{\rho} + (\gamma - 1)M^2 \dfrac{du}{u} = 0 \\ 2\dfrac{du}{u} = 2\dfrac{dM}{M} + \dfrac{dp}{p} - \dfrac{d\rho}{\rho} \end{cases}$$

ove si è considerato un gas perfetto:

$$\begin{cases} p = \rho RT \\ h = c_p T \\ a = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} \end{cases}$$

Esprimendo queste relazioni in funzione del solo numero di Mach, si ottiene:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{u} = (1 + \delta M^2)^{-1} \cdot \dfrac{dM}{M} \\ \dfrac{d\rho}{\rho} = -(1 + \delta M^2)^{-1} \cdot \dfrac{dM}{M} \\ \dfrac{dp}{p} = -\dfrac{1 + (\gamma - 1)M^2}{1 + \delta M^2} \cdot \dfrac{dM}{M} \end{cases}$$

ove $\delta = \frac{\gamma - 1}{2}$.

Dall'equazione di stato si ricava il differenziale della temperatura (quindi dell'entalpia):

$$\frac{dT}{T} = \frac{dh}{h} = \frac{dp}{p} - \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{(\gamma - 1)M^2}{1 + \delta M^2} \cdot \frac{dM}{M}$$

Infine, differenziando la relazione $p_0 = p\,(\,1 + \delta M^2)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ (con $\delta = \frac{\gamma-1}{2}$) che lega la pressione statica a quella totale, si ottiene:

$$\frac{dp_0}{p_0} = \frac{dp}{p} + \frac{\gamma M^2}{1+\delta M^2} \cdot \frac{dM}{M} = -\frac{1-M^2}{1+\delta M^2} \cdot \frac{dM}{M}$$

Il bilancio della quantità di moto scritto in forma logaritmica è quindi espresso in funzione del numero di Mach è:

$$\frac{f \cdot dx}{D_i} = \frac{2}{\gamma M^2} \cdot \frac{1-M^2}{1+\delta M^2} \cdot \frac{dM}{M}$$

Integrando tale relazione, noto il coefficiente di attrito f, la lunghezza L del condotto di diametro idraulico D_i e il Mach di ingresso M_{in}, è possibile conoscere il Mach di uscita M:

$$\frac{f \cdot L}{D_i} = \frac{\gamma+1}{\gamma} \cdot \ln \frac{M_{in}}{M} \cdot \sqrt{\frac{1+\delta M^2}{1+\delta M_{in}^2}} + \frac{1}{\gamma M_{in}^2} - \frac{1}{\gamma M^2}$$

L' attrito è un fenomeno irreversibile, di conseguenza l'entropia del fluido aumenta lungo il moto. Il secondo principio della termodinamica per sistemi termodinamici con generica trasformazione irreversibile può essere scritto:

$$ds = \frac{\delta Q}{T} + ds_{irr}$$

ove δQ è il calore entrante nel sistema.

Il differenziale dell'entropia nel caso di gas perfetto (caloricamente e termicamente) é:

$$ds = c_p \frac{dT_0}{T_0} - R \frac{dp_0}{p_0}$$

Nel caso adiabatico $\delta Q = 0$ (ovvero $dT_0 = 0$) e considerando il bilancio della quantità di moto si ottiene:

$$ds = -R\frac{dp_0}{p_0} = \frac{R}{M}\frac{1-M^2}{1+\delta M^2} \cdot dM = \frac{1}{2}u^2 \left(\frac{f \cdot dx}{D_i}\right) = \frac{\gamma R}{2} M^2 \left(\frac{f \cdot dx}{D_i}\right)$$

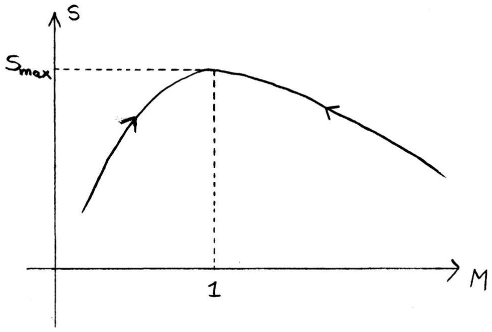

Figura 2: Andamento s-M

Come si vede dall'andamento $s - M$ il flusso (ad entropia crescente perchè isolato ed in presenza di fenomeni irreversibili) se è subsonico ($M < 1$) accelera fino, al più, al punto sonico $M = 1$. Nel caso di flusso supersonico, invece, il flusso rallenta fino, al più, al punto sonico. Il punto sonico è un massimo dell'entropia e non può essere attraversato. Per tale motivo tale condizione è detta di flusso saturato.

Quindi, un flusso a Mach iniziale M_{in} può al più arrivare a $M = 1$. questo comporta un massimo valore $\left(\frac{f \cdot dx}{D_i}\right)_{max}$ che non può essere superato.

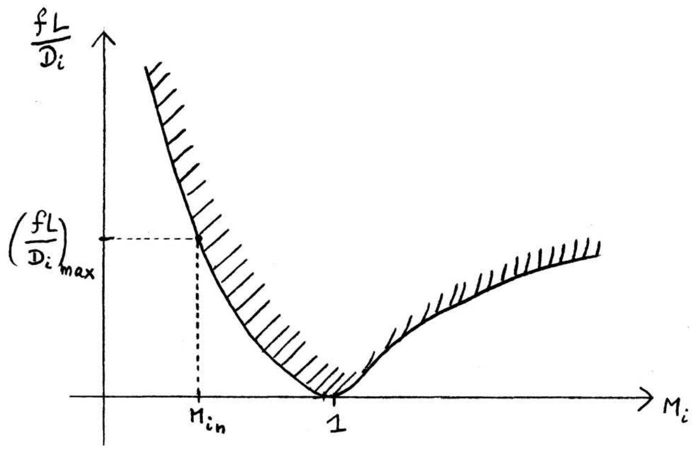

Figura 3: Regione possibile per il flusso di Fanno

Questo grafico permette di capire come si comporta un flusso di Fanno. Preso un condotto di diametro D_i e attrito f, se consideriamo un flusso a M_{in} (ad esempio subsonico) fissato si può conoscere la lunghezza massima L_{max} del condotto sotto la quale il flusso esce subsonico e sopra la quale il flusso non è possibile (perchè si avrebbe saturazione prima dell'uscita del condotto). Invece, se è nota la lunghezza del condotto, si può conoscere il massimo M_{in} ammesso (è il Mach che comporta uscita saturata).

Vediamo come cambiano le varie grandezze del flusso di Fanno. Ricordiamo che, poichè il flusso è adiabatico, l'entalpia (e quindi la temperatura) totale rimane costante:

Subsonico ($M < 1$)	Supersonico ($M > 1$)
$dM > 0$	$dM < 0$
$du > 0$	$du < 0$
$d\rho < 0$	$d\rho > 0$
$dp < 0$	$dp > 0$
$dT < 0$	$dT > 0$
$dp_0 < 0$	$dp_0 < 0$

3 Curva di Fanno

La curva (o linea) di Fanno rappresenta l'insieme degli stati termodinamici che il flusso può assumere, fissata portata G e entalpia totale h_0 costanti.

Generalmente tale linea viene rappresentata nel diagramma $h - s$.

Da

$$\frac{ds}{R} = \frac{1 - M^2}{1 + \delta M^2} \cdot \frac{dM}{M} \quad \text{e} \quad \frac{dh}{h} = -\frac{(\gamma - 1)M^2}{1 + \delta M^2} \cdot \frac{dM}{M}$$

si ottiene:

$$\frac{ds}{R} = -\frac{1 - M^2}{(\gamma - 1)M^2} \cdot \frac{dh}{h}$$

e dalla definizione del numero di Mach:

$$M^2 = \frac{u^2}{a^2} = \frac{2\,(h_0 - h)}{\gamma RT} = \frac{h_0 - h}{\delta h}$$

e si ottiene:

$$\frac{ds}{R} = -\frac{\frac{\gamma+1}{2}h - h_0}{(\gamma - 1)(h_0 - h)} \cdot \frac{dh}{h} = f(h, h_0) \cdot dh$$

La forma è la seguente e dipende solo da h_0:

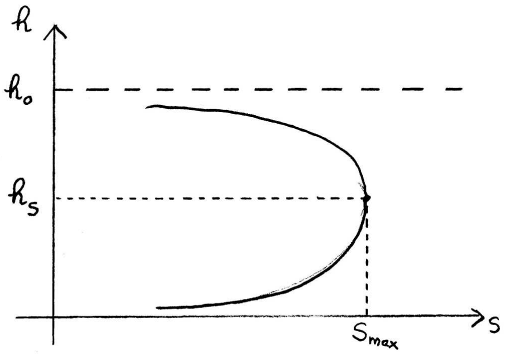

Figura 4: Curva di Fanno

Come si vede, per $h_s = \dfrac{2h_0}{\gamma+1}$ si ha il massimo valore di entropia s_{max}. Si noti che tale valore dipende solo da h_0. Integrando $ds = f(h, h_0) \cdot dh$ si ha (fissato h_0) un fascio di curve uguali in forma e traslate, tutte con massimo in h_s:

Le curve variano per il valore s_{max}, ovvero per il valore p^* di pressione critica del fluido (è la pressione per cui si ha s_{max}). Al diminuire di p^* le curve si spostano verso destra. Un aumento di p^* comporta un aumento di portata G. Infatti, da $G = \rho u$, nel caso sonico ($M = 1$), si ha (da $u = a$, $h = \dfrac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \dfrac{p}{\rho}$ e $h = h_s = \dfrac{2h_0}{\gamma+1}$):

$$G = p^* \sqrt{\frac{2\gamma^2}{(\gamma^2 - 1)\, h_0}}$$

Quindi, fissato h_0, all'aumentare di p^*, G aumenta:

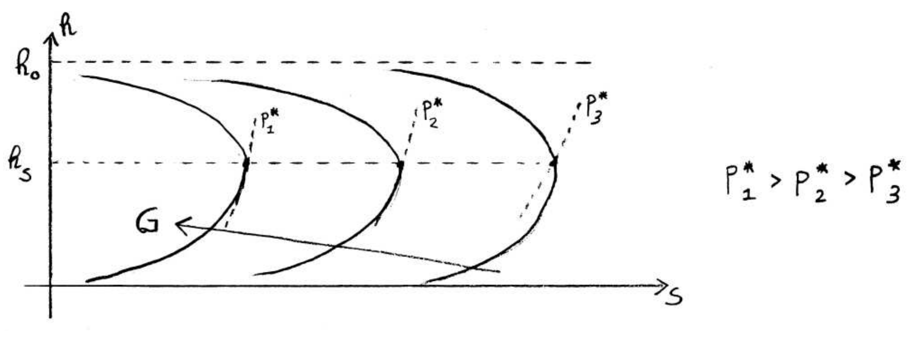

Figura 5: Curve di Fanno al variare di G

Rimane dimostrato che, fissati h_0 e G la curva di Fanno descrive gli stati termodinamici del flusso adiabatico, monodimensionale e con attrito.

Consideriamo il caso in cui vengano fissate h_0 e p_{0in}. Vogliamo vedere come cambia il flusso al variare di G (per un flusso subsonico).

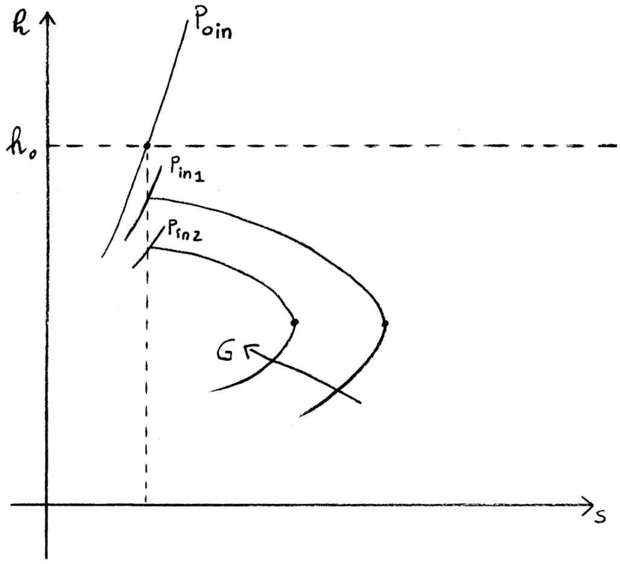

Figura 6: Curve di Fanno con fissate condizioni di serbatoio

Dal grafico è chiaro che all'aumentare di G la pressione di ingresso diminuisce e quindi (da $p_0 = p\,(\,1 + \delta M^2)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$) il M_{in} aumenta. Di conseguenza il flusso andrà in choking in un tratto più breve (vedi figura 3)

Se è fissato l'attrito che il condotto sviluppa (ovvero se è fissato il coefficiente $\frac{f \cdot dx}{D_i}$), al diminuire della pressione ambiente p_{amb}, la portata aumenta (e quindi M_{in} aumenta) fino alla condizione di saturazione.

Se è fissata la pressione ambiente p_{amb}, all'aumentare dell'attrito (ovvero all'aumentare del Δs lungo il condotto) la portata diminuisce.