

Flussi Di Rayleigh

1 Definizione del flusso di Rayleigh

Il flusso di Rayleigh descrive molti casi di interesse pratico come i processi di combustione nelle camere di combustione o il moto di un fluido all'interno di uno scambiatore di calore.

Le ipotesi su cui si basa questo tipo di flusso sono:

- moto 1D (sezione costante)
- assenza di fenomeni di attrito
- flusso con scambio di calore
- gas perfetto (termicamente e caloricamente)
- moto stazionario

Con tali ipotesi, le equazioni che descrivono il comportamento del flusso (conservazione della massa, bilancio della quantità di moto e conservazione dell'energia) sono:

$$\begin{cases} d(\rho u) = 0 & \implies \text{conservazione della massa} \\ dp + \rho u \cdot du = 0 & \implies \text{bilancio della quantità di moto} \\ dh_0 = \delta Q & \implies \text{conservazione dell'energia} \end{cases}$$

ove δQ è il calore infinitesimo scambiato per unità di massa lungo il tratto dx di condotto ed è considerato positivo se entrante nel flusso.

Le equazioni di conservazione della massa e di bilancio della quantità di moto affermano che nel flusso di Rayleigh la portata G e la spinta della corrente I , entrambe per unità di massa, si conservano:

$$\begin{aligned} G &= \rho u = \text{cost} \\ I &= p + Gu = \text{cost} \end{aligned}$$

Queste due grandezze sono le costanti del flusso di Rayleigh e permettono di definire il legame $p - v$ (pressione-volume) per tale tipo di flusso:

$$p = -G^2 v + I$$

ove $v = \frac{1}{\rho}$ è il volume specifico.

Nel piano $p - v$ questa curva a $G = cost$ e $I = cost$ è una retta ed è chiamata *linea di Rayleigh*. Come si vede dal seguente grafico, se la temperatura aumenta, il volume specifico aumenta mentre la pressione scende. Infine, dalla conservazione della massa si ottiene che la velocità aumenta.

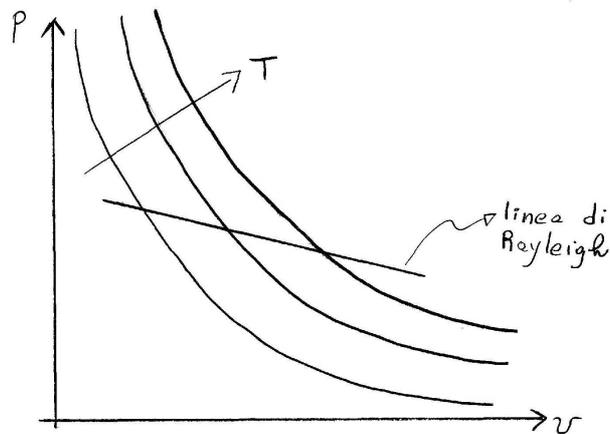


Figura 1: Grafico della linea di Rayleigh

Si noti che se si conosce lo stato iniziale $\rho_{in}, u_{in}, p_{in}$, le costanti del moto sono univocamente determinate ($G = \rho_{in} u_{in}$ e $I = p_{in} + \rho_{in} u_{in}^2$) e lo stato incognito ρ, u, p è determinato se si conosce la quantità di calore Q fornita al sistema, attraverso il sistema non lineare:

$$\begin{cases} G = \rho u \\ I = p + Gu \\ h_{in} + \frac{u_{in}^2}{2} + Q = h + \frac{u^2}{2} \end{cases}$$

Si noti che per chiudere tale sistema, l'equazione di stato termica e calorica deve essere introdotta; nel caso di gas perfetto:

$$\begin{cases} p = \rho RT & \text{con } R = cost \\ h = c_p T & \text{con } c_p = cost \end{cases}$$

2 Comportamento del flusso

Nel seguito verrà mostrato come si comporta il flusso nel caso di adduzione di calore. Per mostrare ciò, la conservazione della massa, il bilancio della quantità di moto e la definizione del numero di Mach ($M = \frac{u}{a} = \sqrt{\gamma RT} = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}$), verranno scritte in forma di derivata logaritmica:

$$\begin{cases} \frac{du}{u} + \frac{dp}{\rho} = 0 \\ \frac{dp}{p} + \gamma M^2 \frac{du}{u} = 0 \\ 2 \frac{du}{u} = 2 \frac{dM}{M} + \frac{dp}{p} - \frac{d\rho}{\rho} \end{cases}$$

Esprimendo queste relazioni in funzione del solo numero di Mach, si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{du}{u} = \frac{2}{1 + \gamma M^2} \cdot \frac{dM}{M} \\ \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{2}{1 + \gamma M^2} \cdot \frac{dM}{M} \\ \frac{dp}{p} = -\frac{2\gamma M^2}{1 + \gamma M^2} \cdot \frac{dM}{M} \end{cases}$$

Inoltre, l'equazione di stato per gas perfetti derivata in forma logaritmica fornisce il differenziale della temperatura (uguale, per gas caloricamente perfetti, a quello dell'entalpia):

$$\frac{dT}{T} = \frac{dh}{h} = \frac{dp}{p} - \frac{d\rho}{\rho} = \frac{2(1 - \gamma M^2)}{1 + \gamma M^2} \cdot \frac{dM}{M}$$

Infine, differenziando la relazione $p_0 = p (1 + \delta M^2)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ (con $\delta = \frac{\gamma-1}{2}$) che lega la pressione statica a quella totale, si ottiene:

$$\frac{dp_0}{p_0} = \frac{dp}{p} + \frac{\gamma M^2}{1 + \delta M^2} \cdot \frac{dM}{M} = -\frac{\gamma M^2 (1 - M^2)}{(1 + \gamma M^2)(1 + \delta M^2)} \cdot \frac{dM}{M}$$

L'equazione di conservazione dell'energia, usando il secondo principio della termodinamica per sistemi caratterizzati da trasformazioni reversibili e da scambio di calore, afferma che:

$$ds = \frac{\delta Q}{T} = \frac{dh_0}{T} = c_p \frac{dT_0}{T}$$

Per un sistema così definito, se entra calore nel fluido (δQ positivo), l'entropia aumenta (ds positivo). Viceversa se esce calore dal fluido. Dalla definizione di entalpia totale ($h_0 = h + \frac{u^2}{2}$), si ottiene il differenziale dell'entropia:

$$ds = c_p \frac{dT}{T} + \gamma R M^2 \frac{du}{u} = 2c_p \frac{1 - M^2}{1 + \gamma M^2} \cdot \frac{dM}{M}$$

e quindi:

$$\frac{dT_0}{T} = \frac{2(1 - M^2)}{(1 + \gamma M^2)} \cdot \frac{dM}{M}$$

Si noti che se entra calore (ovvero $dT_0 > 0$), il flusso accelera ($dM > 0$) se è subsonico ($M < 1$) mentre decelera ($dM < 0$) se è supersonico ($M > 1$). Inoltre, nel caso sonico ($M = 1$), si ha $dT_0 = 0$: non si può somministrare calore perchè il fluido non lo può smaltire.

Quindi un flusso subsonico con adduzione di calore accelera fino a portarsi (al più) a $M = 1$; Il punto sonico è detto "choking termico" e risulta essere una condizione limite dei flussi di Rayleigh.

Similmente, un flusso supersonico con adduzione di calore decelera fino al punto sonico.

Esprimendo le variazioni delle variabili del flusso in funzione di dT_0/T , si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{du}{u} &= \frac{1}{1 - M^2} \cdot \frac{dT_0}{T} \\ \frac{d\rho}{\rho} &= -\frac{1}{1 - M^2} \cdot \frac{dT_0}{T} \\ \frac{dp}{p} &= -\gamma \frac{M^2}{1 - M^2} \cdot \frac{dT_0}{T} \\ \frac{dT}{T} &= \frac{1 - \gamma M^2}{1 - M^2} \cdot \frac{dT_0}{T} \\ \frac{dp_0}{p_0} &= -\frac{\gamma M^2}{2 + (1 + \gamma M^2)} \cdot \frac{dT_0}{T} \end{aligned}$$

Da queste relazioni è immediato comprendere il comportamento del fluido nel caso di calore entrante ($dT_0 > 0$):

Subsonico ($M < 1$)	Supersonico ($M > 1$)
$dM > 0$	$dM < 0$
$du > 0$	$du < 0$
$d\rho < 0$	$d\rho > 0$
$dp < 0$	$dp > 0$
$\left\{ \begin{array}{l} dT > 0 \text{ se } M < \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \\ dT < 0 \text{ se } M > \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \end{array} \right.$	$dT > 0$
$dp_0 < 0$	$dp_0 < 0$

Come si vede, la pressione totale diminuisce in entrambi i regimi di flusso. Ciò è diretta conseguenza della perdita di energia meccanica che il flusso subisce a causa dell'ingresso di calore (aumento di entropia).

Nel caso di flusso subsonico, il fluido accelera fino a portarsi al punto sonico ("choking termico") ma la temperatura aumenta fino a $M = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ ($M \simeq 0.85$ nel caso $\gamma = 1.4$) per poi diminuire, sebbene del calore entra nel flusso. Ciò è dovuto agli effetti della compressibilità: la velocità aumenta più velocemente di quanto non faccia la temperatura totale a causa dell'immissione di calore (da $dh_0 = d(h + u^2/2) = \delta Q$). Come conseguenza il fluido si raffredda.

Nel caso di flusso supersonico il flusso decelera fino a portarsi al punto sonico, mentre pressione, densità e temperatura aumentano.

Si noti che nel caso di sottrazione di calore ($\delta Q < 0$ e quindi $dT_0 < 0$) il comportamento del flusso è esattamente opposto a quello mostrato in precedenza. In particolare, un flusso subsonico decelera, mentre uno supersonico accelera.

3 Curva di Rayleigh

La curva di Rayleigh rappresenta gli stati termodinamici nel piano $h - s$ del flusso di Rayleigh, fissate le costanti del flusso G e I :

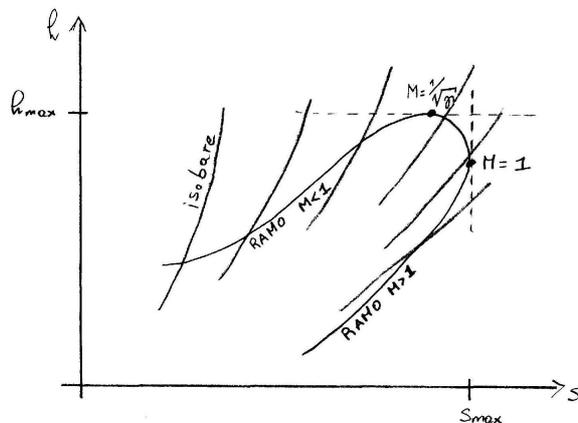


Figura 2: Curva di Rayleigh

Dal grafico si vede che nel caso subsonico, seguendo il flusso ad entropia crescente (nel caso quindi di immissione di calore) il numero di Mach aumenta e la pressione decresce. L'entropia si porta al valore massimo per $M = 1$ mentre l'entalpia (quindi la temperatura) raggiunge il massimo per $M = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} < 1$.

Nel ramo supersonico, seguendo il flusso ad entropia crescente, il flusso rallenta fino al punto sonico mentre la pressione e la temperatura aumentano.

Per meglio comprendere cosa succede ad un flusso con scambio di calore, nel seguito verrà mostrato (in particolare per il caso subsonico) come si comporta un flusso a temperatura e pressione totale iniziali dati (T_{0in} e p_{0in}), al variare della portata.

A tal fine è utile esprimere la portata in funzione dello stato totale (pressione e temperatura) e del numero di Mach:

$$G = \rho u = \frac{p}{RT} Ma = \frac{p_0}{RT_0} \frac{p}{p_0} \frac{T_0}{T} M \sqrt{\gamma RT} \sqrt{\frac{T}{T_0}} = \frac{p_0 \sqrt{\gamma}}{\sqrt{RT_0}} M (1 + \delta M^2)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

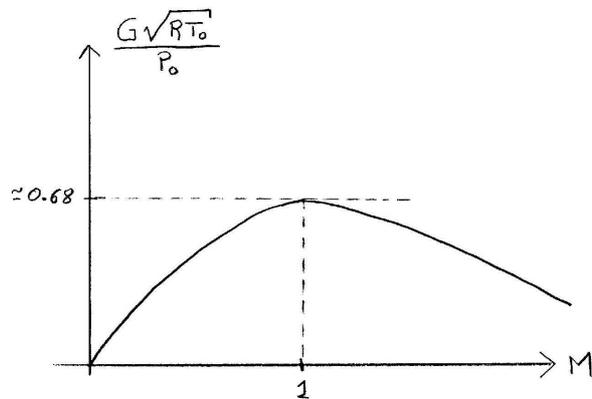


Figura 3: Curva della portata

Dal grafico visto sopra, nel caso subsonico, all'aumentare di G il Mach di ingresso M_{in} aumenta. Come conseguenza (da $\frac{p_0}{p} = (1 + \delta M^2)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$) la pressione all'ingresso p_{in} diminuisce.

Le curve di Rayleigh, al variare della portata, cambiano così:

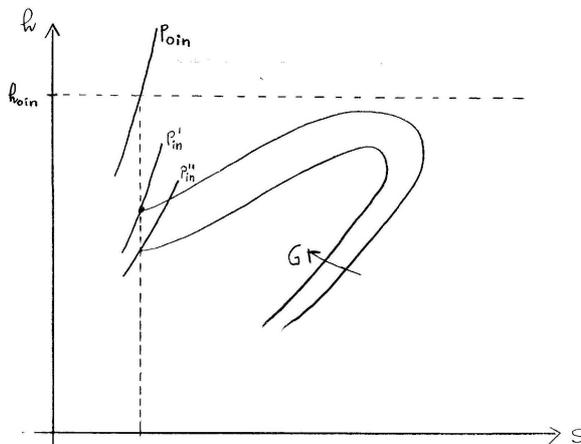


Figura 4: Curve di Rayleigh

Tali curve mostrano che all'aumentare della portata, il massimo valore di entalpia ed entropia diminuiscono; ovvero, il massimo calore che si può trasferire al fluido diminuisce.

Analiticamente ciò può essere mostrato integrando il legame differenziale $ds - dM$ fra lo stato iniziale (s_{in} e M_{in}) e quello finale di massima entropia (s_{max} e

$M = 1$):

$$s_{max} - s_{in} = 2c_p \ln \left[\frac{1}{M_{in}} \left(\frac{1 + \gamma M_{in}^2}{1 + \gamma} \right)^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}} \right]$$

E' facile vedere che all'aumentare della portata (ovvero all'aumentare di M_{in}) il massimo valore dell'entropia s_{max} diminuisce.

Integrando il legame differenziale $dh - dM$, usando la definizione di entalpia totale ($h_0 = h(1 + \delta M^2)$), fra lo stato iniziale (h_{0in} e M_{in}) e quello di entalpia massima (h_{max} e $M = 1/\sqrt{\gamma}$) si ottiene:

$$\frac{h_{max}}{h_{0in}} = \frac{1}{1 + \delta M_{in}^2} \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma} M_{in}} \frac{1 + \gamma M_{in}^2}{2} \right)^2$$

E' facile vedere che all'aumentare della portata (ovvero all'aumentare di M_{in}) il massimo valore dell'entalpia h_{max} diminuisce.

Si analizza adesso il caso di un flusso subsonico con adduzione di calore Q , di cui si conosce pressione e temperatura totali di ingresso (p_{0in} e T_{0in}), pressione dell'ambiente di uscita p_{amb} . Come conseguenza si stabilisce un flusso di portata G .

E' facile mostrare (anche per via grafica) che, fissati p_{0in} , T_{0in} e p_{amb} , all'aumentare del flusso di calore immesso Q la portata diminuisce.

Al diminuire del flusso di calore ceduto al flusso, la portata aumenta (e quindi il Mach di ingresso aumenta) e così il Mach di uscita. Si può arrivare al limite in cui il flusso satura ($M_u = 1$). Diminuendo ancora il flusso di calore il flusso nel condotto diventa supersonico.

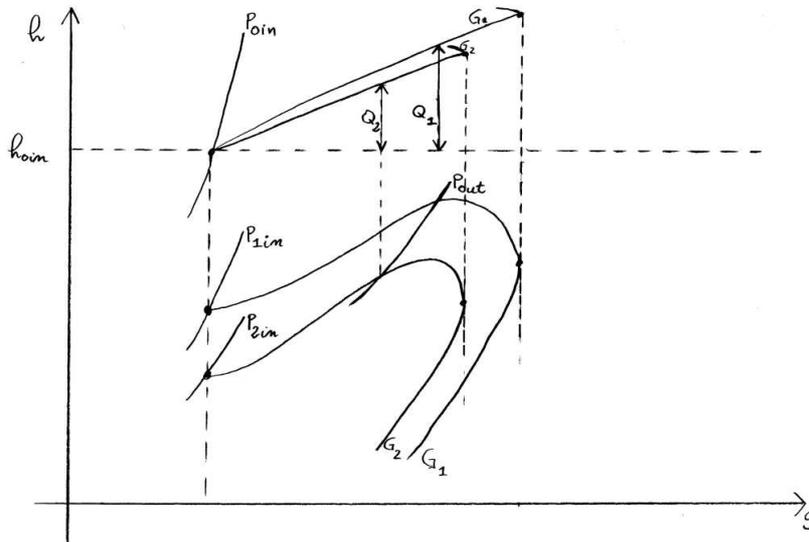


Figura 5: Curve di Rayleigh per entalpia statica e totale

Nel grafico precedente sono mostrate le curve $h - s$ (curve di Rayleigh) e le curve di $h_0 - s$, al variare della portata. Queste ultime curve permettono di valutare l'aumento di entalpia totale che il flusso subisce, ovvero il flusso di calore entrante. Per via grafica è facile vedere che a parità di condizioni iniziali, il massimo flusso di calore Q (ricordiamo che è per unità di massa) cedibile ad un flusso aumenta con il diminuire della portata.

Per comprendere meglio le curve $h_0 - s$, la definizione di entalpia totale ($h_0 = h(1 + \delta M^2)$) è derivata in modo logaritmico ed espressa in funzione del numero di Mach:

$$\frac{dh_0}{h_0} = \frac{dh}{h} + \frac{2\delta M^2}{1 + \delta M^2} \cdot \frac{dM}{M} = \frac{2(1 - M^2)}{(1 + \gamma M^2)(1 + \delta M^2)} \cdot \frac{dM}{M}$$

Come si vede, h_0 ha un massimo per $M = 1$ (punto di saturazione termica). Integrando questa relazione fra lo stato iniziale (h_{0in} e M_{in}) e lo stato di saturazione termica (h_{0max} e $M = 1$) si ottiene:

$$\frac{h_{0max}}{h_{0in}} = \left(\frac{1}{M_{in}} \frac{1 + \gamma M_{in}^2}{1 + \gamma} \right)^2 \left(\frac{1 + \delta}{1 + \delta M_{in}^2} \right)$$

Quindi, fissate le condizioni totali iniziali (h_{0in}), all'aumentare della portata (quindi all'aumentare di M_{in}) il massimo valore dell'entalpia totale diminuisce: ciò dimostra che all'aumentare della portata il massimo calore cedibile diminuisce.