

Capitolo 1

I principi di conservazione

I principi di conservazione della massa, della quantità di moto e dell'energia, sui quali si basa la meccanica dei fluidi, possono dar luogo a diverse formulazioni matematiche, in generale fra loro equivalenti, ognuna delle quali può essere più o meno conveniente a seconda del particolare problema. In questo capitolo verranno dapprima presentate le diverse formulazioni per il caso di un fluido compressibile reale. Successivamente ne verrà discussa la validità nel caso del modello di fluido ideale, per il quale si deve rinunciare all'ipotesi di continuità delle variabili, e verranno ricavate le relazioni che debbono essere soddisfatte attraverso una discontinuità.

1.1 Formulazione integrale per un volume materiale

Si consideri un volume materiale \mathcal{V} , cioè un volume delimitato da una superficie S costituita sempre dalle stesse particelle fluide. Il volume \mathcal{V} è quindi un volume che si deforma e varia posizione nel tempo $\mathcal{V} = \mathcal{V}(t)$. Il principio di conservazione della massa si può esprimere dicendo che è nulla la variazione nel tempo della massa contenuta in tale volume, ovvero

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V} = 0 \quad (1.1)$$

Analogamente, il principio di conservazione della quantità di moto asserisce che la variazione nel tempo della quantità di moto del fluido contenuto in \mathcal{V} è uguale alla risultante delle forze di massa e di superficie:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{V} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{f} d\mathcal{V} + \oint_S \mathbf{t} dS \quad (1.2)$$

E' spesso conveniente scrivere l'equazione vettoriale (1.2) in termini delle sue componenti scalari in una generica base

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho u_i d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \rho f_i d\mathcal{V} + \oint_S t_i dS \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.3)$$

Le componenti delle forze di superficie possono essere espresse in termini delle componenti del tensore degli sforzi

$$t_i = t_{ij} n_j \quad (1.4)$$

dove si è assunta la convenzione dell'indice ripetuto ed n_j rappresentano le componenti del versore \mathbf{n} normale all'elemento di superficie, assunto positivo se orientato verso l'esterno del volume \mathcal{V} .

Nell'ipotesi di fluido newtoniano, per il quale esiste una relazione lineare fra le componenti del tensore della velocità di deformazione e quelle del tensore degli sforzi, queste ultime possono essere espresse come:

$$t_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (1.5)$$

con

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (1.6)$$

Mediante le (1.4) e (1.5), le (1.3) diventano:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho u_i d\mathcal{V} + \oint_S p n_j \delta_{ij} dS = \int_{\mathcal{V}} \rho f_i d\mathcal{V} + \oint_S \tau_{ij} n_j dS \quad (1.7)$$

Il principio di conservazione dell'energia asserisce che la variazione nel tempo dell'energia totale (somma dell'energia interna e dell'energia cinetica) del fluido contenuto in \mathcal{V} è uguale alla somma del lavoro fatto dalle forze di massa e di superficie e del flusso di calore che entra nel volume attraverso la superficie S , ovvero:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \left(e + \frac{1}{2} u_j u_j \right) \rho d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \rho f_j u_j d\mathcal{V} + \oint_S t_i u_i dS - \oint_S q_j n_j dS \quad (1.8)$$

nella quale non si è tenuto conto di eventuali scambi di calore radiativi ed e rappresenta l'energia interna per unità di massa.

Il segno negativo nell'ultimo termine della (1.8) è dovuto alla convenzione di assumere positivo, se diretto verso l'esterno, il flusso di calore per conduzione

che, in base al postulato di Fourier, è dato da

$$q_j = -k \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (1.9)$$

Introducendo l'energia totale per unità di volume

$$E = \left(e + \frac{1}{2} u_j u_j \right) \rho \quad (1.10)$$

ed utilizzando le (1.4) e (1.5), la (1.8) risulta

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} E d\mathcal{V} + \oint_S p u_j n_j dS = \int_{\mathcal{V}} \rho f_j u_j d\mathcal{V} + \oint_S (\tau_{ij} u_i - q_j) n_j dS \quad (1.11)$$

Introducendo il vettore delle variabili conservate

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u_i \\ E \end{Bmatrix} \quad (1.12)$$

ed i vettori

$$\mathbf{P}_j = \begin{Bmatrix} 0 \\ p \delta_{ij} \\ p u_j \end{Bmatrix} \quad \mathbf{G}_j = \begin{Bmatrix} 0 \\ \tau_{ij} \\ \tau_{ij} u_i + k \frac{\partial T}{\partial x_j} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \rho f_i \\ \rho f_j u_j \end{Bmatrix} \quad (1.13)$$

che hanno $N + 2$ componenti, essendo N il numero delle dimensioni spaziali del problema, le (1.1), (1.7) e (1.11) possono essere espresse in forma compatta come

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{U} d\mathcal{V} + \oint_S \mathbf{P}_j n_j dS = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{Q} d\mathcal{V} + \oint_S \mathbf{G}_j n_j dS \quad (1.14)$$

1.2 Formulazione integrale per un volume fisso

E' spesso conveniente esprimere i principi di conservazione per un volume che non varia nel tempo, cioè un volume fisso nello spazio (formulazione euleriana). Ciò può essere semplicemente realizzato esprimendo le derivate temporali degli integrali sul volume materiale $\mathcal{V}(t)$ mediante il teorema del trasporto di

Reynolds

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \phi d\mathcal{V} = \frac{d}{dt} \int_{\bar{\mathcal{V}}} \phi d\mathcal{V} + \oint_S \phi u_j n_j dS \quad (1.15)$$

nella quale $\bar{\mathcal{V}}$ è il volume fisso nello spazio che coincide istantaneamente con \mathcal{V} .

Ad esempio, mediante la (1.15) il principio di conservazione della massa (1.1) risulta:

$$\frac{d}{dt} \int_{\bar{\mathcal{V}}} \rho d\mathcal{V} + \oint_S \rho u_j n_j dS = 0 \quad (1.16)$$

La (1.16) esprime il fatto che la variazione nel tempo della massa contenuta nel volume fisso $\bar{\mathcal{V}}$ è uguale alla risultante dei flussi di massa entranti o uscenti attraverso la superficie S .

Applicando la (1.15) alla (1.14) si ha

$$\frac{d}{dt} \int_{\bar{\mathcal{V}}} \mathbf{U} d\mathcal{V} + \oint_S \mathbf{F}_j n_j dS = \int_{\bar{\mathcal{V}}} \mathbf{Q} d\mathcal{V} + \oint_S \mathbf{G}_j n_j dS \quad (1.17)$$

nella quale

$$\mathbf{F}_j = \mathbf{U} u_j + \mathbf{P}_j \quad (1.18)$$

Poiché $\mathbf{U} u_j$ rappresenta il flusso delle variabili conservate, i vettori \mathbf{F}_j vengono detti vettori di flusso generalizzati ed analogamente i vettori \mathbf{G}_j vengono detti vettori di flusso viscosi.

1.3 Formulazione differenziale in forma di divergenza

Poiché il volume $\bar{\mathcal{V}}$ che compare nell'integrale del primo termine della (1.17) non dipende dal tempo, è possibile invertire le operazioni di derivazione e di integrazione. E' poi possibile trasformare gli integrali di superficie che compaiono nella (1.17) in integrali di volume, utilizzando il teorema della divergenza di Gauss:

$$\oint_S \phi_j n_j dS = \int_{\bar{\mathcal{V}}} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_j} d\mathcal{V} \quad (1.19)$$

La (1.17) diviene pertanto

$$\int_{\bar{\mathcal{V}}} \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_j}{\partial x_j} - \frac{\partial \mathbf{G}_j}{\partial x_j} - \mathbf{Q} \right) d\mathcal{V} = 0 \quad (1.20)$$

che, dovendo essere verificata per qualunque volume $\bar{\mathcal{V}}$, richiede l'annullarsi dell'integrando.

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \mathbf{G}_j}{\partial x_j} + \mathbf{Q} \quad (1.21)$$

E' questa la forma di divergenza (detta anche forma conservativa) delle equazioni di Navier–Stokes.

A titolo di esempio, si riportano in forma esplicita le (1.21) scritte in assenza di forze di massa per un caso bidimensionale, indicando con u, v , le componenti della velocità in una base cartesiana x, y :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(p + \rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv) = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad (1.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(p + \rho v^2) = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \quad (1.24)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho e + \rho \frac{u^2 + v^2}{2} \right) + \\ & \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho e u + \rho u \frac{u^2 + v^2}{2} + p u \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho e v + \rho v \frac{u^2 + v^2}{2} + p v \right) = \\ & \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau_{xx} u + \tau_{xy} v + k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\tau_{xy} u + \tau_{yy} v + k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (1.25)$$

1.4 Formulazione differenziale quasi-lineare

Le equazioni (1.22–1.25) possono essere notevolmente semplificate combinandole opportunamente fra loro e sviluppando le derivate che in esse compaiono. La (1.22) può scriversi:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (1.26)$$

Sottraendo la (1.22) moltiplicata per u dalla (1.23), e la (1.22) moltiplicata per v dalla (1.24), si ha

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \quad (1.27)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

Infine, sottraendo dalla (1.25) la (1.22) moltiplicata per e , la (1.23) moltiplicata per u e la (1.24) moltiplicata per v , si ottiene:

$$\rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + u \frac{\partial e}{\partial x} + v \frac{\partial e}{\partial y} \right) + p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \mu \phi \quad (1.28)$$

dove la funzione di dissipazione ϕ è data da

$$\phi = 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{\lambda}{\mu} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \quad (1.29)$$

Le (1.26–1.27–1.28) costituiscono la forma quasi-lineare delle equazioni di Navier–Stokes (detta anche forma non conservativa). Si ricorda che un’equazione è detta quasi-lineare quando i coefficienti delle derivate di ordine massimo dipendono al più dalle derivate di ordine inferiore.

Utilizzando la notazione vettoriale ed introducendo la derivata materiale:

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (1.30)$$

le equazioni quasi-lineari possono scriversi più sinteticamente come

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (1.31)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} + \nabla p = \mu \nabla^2 \mathbf{V} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) \quad (1.32)$$

$$\rho \frac{De}{Dt} + p \nabla \cdot \mathbf{V} = k \nabla^2 T + \mu \phi \quad (1.33)$$

E’ talvolta conveniente esprimere l’equazione dell’energia in termini dell’entalpia, anziché dell’energia interna. Eliminando $\nabla \cdot \mathbf{V}$ fra le (1.31) e (1.33) si ottiene

$$\rho \frac{Dh}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} = k \nabla^2 T + \mu \phi \quad (1.34)$$

1.5 Equazioni di conservazione per un fluido ideale

Per un fluido ideale le diverse formulazioni dei principi di conservazione possono essere ottenute molto semplicemente, ponendo a zero (in assenza di forze di massa) i secondi membri delle equazioni (1.14) o (1.17) o (1.21) o infine ((1.32)–(1.33)). Le equazioni così ottenute prendono il nome di *equazioni di Eulero*.

Tuttavia, mentre per un fluido reale le variabili sono sempre continue, quando si adotta il modello di fluido ideale le variabili possono anche essere discontinue attraverso superfici (o linee) all'interno del dominio. Una soluzione discontinua evidentemente non può soddisfare, almeno in senso classico, le equazioni differenziali (1.21) o (1.26)–(1.28), in quanto le derivate non sono definite in corrispondenza della discontinuità. Viceversa, i principi di conservazione e le loro formulazioni integrali seguitano a valere anche per una soluzione discontinua. Infatti nello scrivere le (1.14) abbiamo ipotizzato solo l'integrabilità delle variabili, mentre nel ricavare le (1.21) abbiamo utilizzato il teorema di Gauss, che presuppone anche la derivabilità.

Pertanto una soluzione ovunque continua delle equazioni integrali è anche soluzione delle equazioni differenziali. Tali soluzioni sono dette *soluzioni classiche*. Invece una soluzione continua a tratti delle equazioni integrali non è soluzione delle equazioni differenziali, a meno di non estendere il concetto di soluzione, introducendo le soluzioni generalizzate o *soluzioni deboli*.

Poiché per una soluzione discontinua seguitano a valere le equazioni integrali, da queste è possibile ottenere le relazioni che legano tra loro le variabili attraverso la discontinuità. Queste relazioni, che verranno ricavate nel prossimo paragrafo, sono dette *relazioni di salto*.

Una soluzione continua a tratti che soddisfi le relazioni di salto attraverso la discontinuità è una soluzione debole delle equazioni (1.21). L'introduzione del concetto di soluzione debole, che non richiede la continuità e differenziabilità ovunque e che comprende sia le soluzioni classiche che quelle con discontinuità, consente di superare una limitazione connessa alle soluzioni classiche. Infatti è possibile dimostrare che, per date condizioni iniziali, la soluzione classica è unica, ma esiste solo per un tempo finito. Basti pensare al caso di un'onda di compressione continua che, evolvendo, dopo un certo tempo dà luogo ad un'onda d'urto e quindi non esiste più come soluzione classica. Viceversa una soluzione debole esiste per un tempo qualunque ma, per date condizioni iniziali, può non essere unica: con gli stessi dati iniziali, si può cioè avere più d'una soluzione debole. Naturalmente nella realtà fisica la soluzione è invece unica e pertanto una sola delle soluzioni deboli ha significato fisico, mentre le altre sono soluzioni spurie. Ciò dipende dal fatto che le equazioni di Eulero rappresentano solo un modello semplificato della realtà, nel quale in particolare si sono trascurati gli effetti della viscosità. Nel porre $\mu = 0$ bisogna quindi assicurarsi che la soluzione debole delle equazioni di Eulero sia il limite per $\mu \rightarrow 0$ della soluzione delle equazioni di Navier–Stokes. Ma una soluzione debole può anche essere pensata come il limite cui tende un altro set di equazioni, analogo a quello di Navier–Stokes, ma aventi viscosità negativa e che non hanno quindi corrispondenza con la realtà fisica. Per escludere queste soluzioni (urti di espansione) bisogna quindi in qualche modo aver memoria del fatto che gli effetti viscosi hanno carattere dissipativo. Ciò può essere realizzato facendo

ricorso al secondo principio della termodinamica, che afferma che l'entropia di un sistema isolato è non decrescente. In particolare si dovrà imporre che l'entropia delle particelle che attraversano una discontinuità non diminuisca.

Pertanto al fine di escludere le soluzioni spurie ed individuare quindi l'unica soluzione fisicamente corretta, si dovranno integrare le equazioni di Eulero con la condizione

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho s d\mathcal{V} \geq 0 \quad (1.35)$$

essendo s l'entropia per unità di massa.

La (1.35) prende il nome di *condizione di entropia*.

1.6 Relazioni di salto

Consideriamo nuovamente un volume materiale \mathcal{V} all'interno del quale sia presente una superficie di discontinuità S_0 che si muova con velocità \mathbf{w} relativamente al riferimento fisso (Fig. 1.1).

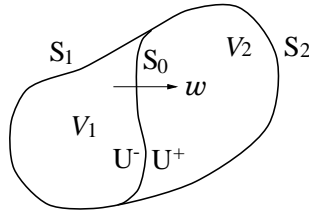


Figura 1.1:

In assenza di forze di massa e per un fluido ideale, i principi di conservazione (1.14) risultano

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{U} d\mathcal{V} + \oint_S \mathbf{P}_j n_j dS = 0 \quad (1.36)$$

cui va aggiunta la (1.35).

Gli integrali di volume che compaiono nelle (1.35)–(1.36) possono essere decomposti nella somma degli integrali estesi ai volumi \mathcal{V}_1 e \mathcal{V}_2 separati fra loro dalla superficie S_0 :

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{U} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_1} \mathbf{U} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}_2} \mathbf{U} d\mathcal{V} \quad (1.37)$$

Si osservi però che il volume \mathcal{V}_1 (e così pure \mathcal{V}_2) non è un volume materiale in quanto una parte della superficie che lo delimita, S_1 , si muove con la velocità del

fluido, mentre l'altra parte S_0 ha velocità \mathbf{w} . Pertanto, applicando il teorema di trasporto al volume \mathcal{V}_1 si ha:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_1} \mathbf{U} d\mathcal{V} = \frac{d}{dt} \int_{\bar{\mathcal{V}}_1} \mathbf{U} d\mathcal{V} + \int_{S_1} \mathbf{U} u_j n_j dS + \int_{S_0} \mathbf{U} w_j n_j dS \quad (1.38)$$

Procedendo analogamente per \mathcal{V}_2 e sostituendo nelle (1.37) e (1.36) si ha

$$\frac{d}{dt} \int_{\bar{\mathcal{V}}_1 \cup \bar{\mathcal{V}}_2} \mathbf{U} d\mathcal{V} + \oint_{\bar{S}_1 \cup \bar{S}_2} (\mathbf{P}_j + \mathbf{U} u_j) n_j dS + \int_{S_0} (\mathbf{U}^- - \mathbf{U}^+) w_j n_j dS = 0 \quad (1.39)$$

nella quale si è indicato con \mathbf{U}^- e \mathbf{U}^+ il valore assunto dalle variabili conservate a destra e a sinistra della discontinuità rispettivamente, e si è tenuto conto del fatto che $(n_j)_{S_0^+} = -(n_j)_{S_0^-}$. Invertendo le operazioni di derivazione e di integrazione nel primo termine e ricordando la (1.18), la (1.39) si scrive

$$\int_{\bar{\mathcal{V}}} \frac{d\mathbf{U}}{dt} d\mathcal{V} + \oint_{\bar{S}_1 \cup \bar{S}_2} \mathbf{F}_j n_j dS + \int_{S_0} (\mathbf{U}^- - \mathbf{U}^+) w_j n_j dS = 0 \quad (1.40)$$

Facendo ora il limite per $S_1 \rightarrow S_0$ e $S_2 \rightarrow S_0$, il volume $\bar{\mathcal{V}}$ tende a zero e quindi il primo termine si annulla, il valore di \mathbf{F}_j su S_1 tende a \mathbf{F}_j^- e $(n_j)_{S_1} \rightarrow (n_j)_{S_0^-}$, mentre il valore di \mathbf{F}_j su S_2 tende a \mathbf{F}_j^+ e $(n_j)_{S_2} \rightarrow (n_j)_{S_0^+}$. La (1.40) si riduce a

$$\int_{S_0} \left[(\mathbf{F}_j^+ - \mathbf{F}_j^-) n_j - (\mathbf{U}^+ - \mathbf{U}^-) w_j n_j \right] dS = 0 \quad (1.41)$$

Osservando che $w_j n_j$ è la componente w_n della velocità della discontinuità in direzione normale alla discontinuità stessa e introducendo la notazione

$$[\psi] = \psi^+ - \psi^- \quad (1.42)$$

la (1.41) fornisce

$$[\mathbf{F}_j] n_j = w_n [\mathbf{U}] \quad (1.43)$$

che prendono il nome di relazioni di salto o *relazioni di Rankine-Hugoniot generalizzate*.

Procedendo in maniera del tutto identica, la (1.35) dà luogo a

$$[\rho s u_j n_j] \geq w_n [\rho s] \quad (1.44)$$

Si osservi che nel caso particolare di una discontinuità stazionaria si ha $w = 0$ e dalla (1.43) deriva

$$[\mathbf{F}_j] = 0 \quad (1.45)$$

cioè, pur essendo discontinue le variabili \mathbf{U} , i loro flussi generalizzati sono continui attraverso la discontinuità.

Le relazioni di salto possono essere esplicitate introducendo in esse le (1.11) e (1.18) ed utilizzando, anziché una base generica, le componenti della velocità \mathbf{u}_t , tangenziale, e $u_n = u_j n_j$ normale alla discontinuità. Si ottiene

$$\begin{aligned} [\rho u_n] &= w_n [\rho] \\ [p + \rho u_n^2] &= w_n [\rho u_n] \\ [\rho u_n \mathbf{u}_t] &= w_n [\rho \mathbf{u}_t] \\ [E u_n + p u_n] &= w_n [E] \\ [\rho s u_n] &\geq w_n [\rho s] \end{aligned} \quad (1.46)$$

che, introducendo la velocità del fluido relativa alla discontinuità

$$v_n = u_n - w_n \quad (1.47)$$

assumono le espressioni

$$[\rho v_n] = 0 \quad (1.48)$$

$$[p + \rho v_n u_n] = 0 \quad (1.49)$$

$$[\rho v_n \mathbf{u}_t] = 0 \quad (1.50)$$

$$[E v_n + p u_n] = 0 \quad (1.51)$$

$$[\rho s v_n] \geq 0 \quad (1.52)$$

E' conveniente esprimere le (1.49) e (1.51) in cui compare u_n in termini

della sola v_n . Tenendo conto della (1.48), la (1.49) può scriversi

$$[p + \rho v_n u_n] - w_n[\rho v_n] = 0$$

da cui

$$[p + \rho v_n^2] = 0 \quad (1.53)$$

Analogamente per la (1.51) si ha

$$[E v_n + p u_n] + \frac{w_n^2 + w_t^2}{2}[\rho v_n] - w_n[p + \rho u_n v_n] - w_t[\rho v_n u_t] = 0$$

che, ricordando la definizione (1.10), risulta:

$$\left[\rho v_n \left(e + \frac{p}{\rho} + \frac{v_n^2 + v_t^2}{2} \right) \right] = 0 \quad (1.54)$$

ovvero

$$[\rho v_n H] = 0 \quad (1.55)$$

dove H è l'entalpia totale per unità di massa nel moto relativo alla discontinuità

$$H = h + \frac{v_n^2 + v_t^2}{2} \quad (1.56)$$

La quantità ρv_n che compare nella (1.48) è il flusso di massa che passa attraverso la discontinuità e la (1.48) esprime il fatto che nella discontinuità non si ha accumulo (o perdita) di massa e pertanto il flusso di massa entrante è uguale a quello uscente.

1.7 Discontinuità di contatto

Un caso particolare di discontinuità si ha nel caso in cui il flusso di massa attraverso la discontinuità sia nullo. Tale discontinuità prende il nome di *discontinuità di contatto*.

Poiché la densità non può essere nulla, affinché sia nullo il flusso di massa dovrà essere

$$v_n^+ = v_n^- = 0 \quad (1.57)$$

ovvero

$$u_n^+ = u_n^- = w_n \quad (1.58)$$

Nel caso in cui $w_n \neq 0$ la discontinuità di contatto si muove con la velocità del fluido ed è quindi una superficie materiale. Nel caso in cui $w_n = 0$ (discontinuità stazionaria), la discontinuità è una linea di corrente, che viene anche detta *linea di scorrimento*.

Dalla (1.53) discende immediatamente

$$[p] = 0 \quad (1.59)$$

Pertanto attraverso una discontinuità di contatto si mantengono continue sia la velocità normale che la pressione. Viceversa dalle (1.48), (1.50), (1.52) e (1.55) si desume che la densità, la velocità tangenziale, l'entropia, l'entalpia e di conseguenza la temperatura possono essere discontinue con un salto di entità qualunque.

Una discontinuità di contatto è quindi una superficie che separa due fluidi aventi diverse caratteristiche termodinamiche o diversa velocità tangenziale alla discontinuità. Il primo caso corrisponde, ad esempio, all'interfaccia fra due zone di fluido aventi stessa pressione ma diversa temperatura, il secondo al confine di un getto che fuoriesca in un ambiente in cui il fluido è in quiete. Nella realtà fisica i fenomeni diffusivi (viscosità e conducibilità termica) fanno sì che una discontinuità di contatto, se pur esiste ad un istante iniziale, non si mantenga come tale ma divenga uno strato, il cui spessore va sempre più aumentando, attraverso il quale si ha una variazione continua delle grandezze termodinamiche o della velocità (strato di mescolamento).

1.8 Onda d'urto

Nel caso di un'onda d'urto per la quale $v_n \neq 0$, le relazioni di salto possono scriversi

$$[\rho v_n] = 0 \quad (1.60)$$

$$[p + \rho v_n^2] = 0 \quad (1.61)$$

$$[\mathbf{u}_t] = 0 \quad (1.62)$$

$$[H] = 0 \quad (1.63)$$

$$[s] \geq 0 \quad \text{se } v_n > 0 \quad (1.64)$$

Queste relazioni consentono di ottenere i valori delle grandezze a valle dell'urto, una volta che siano noti i valori a monte (o viceversa).

Dal momento che le relazioni di salto sono state ottenute a partire da un modello di fluido non viscoso, potrebbe sorgere il dubbio che per un fluido reale le relazioni fra le grandezze a monte e a valle dell'urto siano diverse.

Consideriamo, per semplicità, il caso di un urto stazionario ($w_n = 0$) in un flusso unidimensionale per il quale si ha solo la componente di velocità $u(x)$. L'andamento di $u(x)$ sarà del tipo indicato in Fig. 1.2.

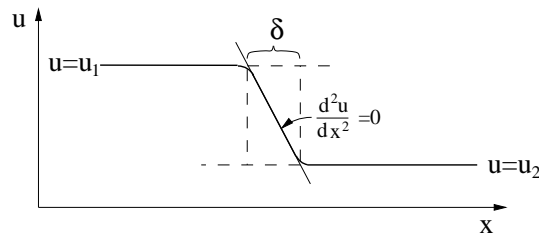


Figura 1.2:

Le equazioni di Navier–Stokes per tale flusso possono essere immediatamente ottenute dalle (1.22–1.23–1.25), annullando le derivate rispetto a t e ad y e ricordando che

$$\tau_{xx} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x}$$

si ottiene

$$\frac{d}{dx}(\rho u) = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left[p + \rho u^2 - (\lambda + 2\mu) \frac{du}{dx} \right] = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left[\rho u \left(e + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) - k \frac{dT}{dx} - (\lambda + 2\mu) u \frac{du}{dx} \right] = 0$$

ovvero

$$\rho u = \text{cost} \tag{1.65}$$

$$p + \rho u^2 - (\lambda + 2\mu) \frac{du}{dx} = \text{cost} \tag{1.66}$$

$$\rho u H - k \frac{dT}{dx} - (\lambda + 2\mu) u \frac{du}{dx} = \text{cost} \tag{1.67}$$

Se consideriamo due ascisse a monte e a valle sufficientemente distanti dalla zona di transizione, in esse si avrà $\frac{dT}{dx} \cong 0$, $\frac{du}{dx} \cong 0$ e le precedenti relazioni si riducono a

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \quad (1.68)$$

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2 \quad (1.69)$$

$$H_1 = H_2 \quad (1.70)$$

che coincidono con le (1.60)–(1.61)–(1.63) nelle quali $v_n = u$.

La relazione (1.66), che è valida in tutto il campo, consente anche di ottenere una valutazione dell'ordine di grandezza dello spessore dell'urto. Questo è in teoria infinito in quanto la velocità tende asintoticamente ai valori u_1 e u_2 . Tuttavia si può dare dello spessore d'urto la definizione convenzionale di Prandtl: lo spessore dell'urto δ è dato dalla differenza fra le intersezioni con le rette $u = u_1$ e $u = u_2$ della retta tangente alla curva della velocità nel punto in cui la derivata è massima, cioè nel punto di flesso (Fig. 1.2).

Poiché all'interno dell'urto i termini viscosi non sono trascurabili, dovranno essere dello stesso ordine di grandezza dei termini convettivi. Dalla (1.66) si ha quindi

$$\mu \frac{du}{dx} = O[\rho u^2] \quad (1.71)$$

Valutando la derivata di u come

$$\frac{du}{dx} = \frac{u_2 - u_1}{\delta}$$

e tenendo conto che, escludendo il caso di un urto di intensità molto piccola, $u_2 - u_1$ è dell'ordine della velocità media all'interno dell'urto, dalla (1.71) si ha

$$\delta = O \left[\frac{\mu}{\rho u} \right] \quad (1.72)$$

Poiché ρu è costante in base alla (1.65), possiamo valutarlo in qualunque punto all'interno dell'urto. In particolare, poiché, come si vedrà nel seguito, attraverso un urto si passa sempre da flusso supersonico a flusso subsonico, si potrà valutare ρu nel punto in cui $M = 1$ e quindi $u = a$. Valutando anche μ nello stesso punto e ricordando che, dalla teoria cinetica dei gas, si ha

$$\mu = O[\rho a l]$$

in cui l è il libero cammino medio delle molecole, dalla (1.72) si ottiene

$$\delta = 0[l] \tag{1.73}$$

In condizioni normali di pressione e temperatura ($p = 1 \text{ atm}$, $T = 0^\circ\text{C}$) lo spessore dell'onda d'urto è quindi dell'ordine di 10^{-6} cm .