

Capitolo 6

Flussi supersonici su corpi assialsimmetrici

In numerosi problemi di interesse aeronautico si ha a che fare con corpi o superfici di rivoluzione che sono quindi simmetrici rispetto ad un'asse. Si pensi ad esempio per i flussi esterni al problema di un missile e per i flussi interni alle prese d'aria ed agli ugelli di un turboreattore. Tuttavia, pur in presenza di una geometria assialsimmetrica, non sempre il flusso è anch'esso assialsimmetrico. Ad esempio nel caso di un missile, se l'angolo di incidenza è nullo, il flusso è assialsimmetrico ed il problema tridimensionale può essere ricondotto ad un problema in due dimensioni. Viceversa, se $\alpha \neq 0$, il problema resta tridimensionale. In questo capitolo verrà dapprima trattato il problema generale di un flusso tridimensionale nell'ipotesi di piccole perturbazioni e quindi verranno studiati alcuni semplici flussi assialsimmetrici.

6.1 Equazione del potenziale in coordinate cilindriche

Consideriamo un flusso omentalpico ed omentropico su un corpo di rivoluzione. Come si è visto nel Cap. 2, il flusso è irrotazionale ed è governato dall'equazione (2.12).

Per descrivere la geometria del corpo è conveniente introdurre un sistema di coordinate cilindriche x, r, ϑ (Fig. 6.1), cosicchè le componenti di velocità sono date da

$$\begin{aligned} V_x &= \phi_{,x} \\ V_r &= \phi_{,r} \\ V_{\vartheta} &= \frac{1}{r} \phi_{,\vartheta} \end{aligned} \tag{6.1}$$

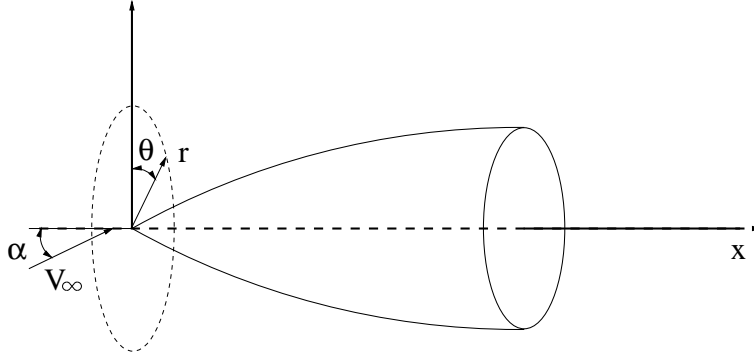


Figura 6.1:

Sostituendo nella (2.12) le espressioni

$$\begin{aligned} \mathbf{V} \cdot \nabla &= \phi_{,x} \frac{\partial}{\partial x} + \phi_{,r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\phi_{,\vartheta}}{r^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \\ \nabla \cdot \mathbf{V} &= \frac{\partial}{\partial x} \phi_{,x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \phi_{,r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \phi_{,\vartheta} \end{aligned}$$

si ottiene l'espressione in coordinate cilindriche dell'equazione completa del potenziale

$$\begin{aligned} &(a^2 - \phi_{,x}^2) \phi_{,xx} + (a^2 - \phi_{,r}^2) \phi_{,rr} + \left(a^2 - \frac{\phi_{,\vartheta}^2}{r^2} \right) \frac{\phi_{,\vartheta\vartheta}}{r^2} \\ &+ \frac{\phi_{,r}}{r} \left(a^2 + \frac{\phi_{,\vartheta}^2}{r^2} \right) - 2\phi_{,x}\phi_{,r}\phi_{,xr} - \frac{2}{r^2}\phi_{,\vartheta}\phi_{,r}\phi_{,r\vartheta} - \frac{2}{r^2}\phi_{,x}\phi_{,\vartheta}\phi_{,x\vartheta} = 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

alla quale va associata l'equazione di conservazione dell'energia nella forma

$$a^2 = a_\infty^2 - \delta \left(\phi_{,x}^2 + \phi_{,r}^2 + \frac{\phi_{,\vartheta}^2}{r^2} - V_\infty^2 \right) \quad (6.3)$$

6.2 Metodo delle piccole perturbazioni

Analogamente a quanto visto nel caso dei flussi piani, assumiamo che il raggio del corpo e l'angolo di incidenza siano sufficientemente piccoli da poter ritenere che i disturbi di velocità generati dal corpo siano piccoli rispetto alla velocità V_∞ . Anzichè misurare i disturbi rispetto alla corrente uniforme

parallela all'asse x , è conveniente riferire i disturbi alla corrente uniforme inclinata dell'angolo α . Questa è data dalla sovrapposizione di una corrente uniforme $V_\infty \cos \alpha$ diretta secondo l'asse x (*flusso assiale*) e di una corrente uniforme $V_\infty \sin \alpha$ diretta normalmente all'asse x (*flusso trasversale*). Con le stesse notazioni utilizzate per la (2.20), il potenziale totale è dato da

$$\phi = V_\infty l (x' \cos \alpha + r' \sin \alpha \cos \vartheta + \varphi) \quad (6.4)$$

e le componenti della velocità risultano

$$\begin{aligned} V_x &= V_\infty (\cos \alpha + \varphi_{,x'}) \\ V_r &= V_\infty (\sin \alpha \cos \vartheta + \varphi_{,r'}) \\ V_\vartheta &= V_\infty \left(-\sin \alpha \sin \vartheta + \frac{1}{r'} \varphi_{,\vartheta} \right) \end{aligned} \quad (6.5)$$

Introducendo le (6.3) e (6.5) nella (6.2), e trascurando tutti i termini non lineari in base all'ipotesi $\varphi \ll 1$, si perviene all'*equazione linearizzata*

$$\left(M_\infty^2 - 1 \right) \varphi_{,xx} - \varphi_{,rr} - \frac{1}{r^2} \varphi_{,\vartheta\vartheta} - \frac{1}{r} \varphi_{,r} = 0 \quad (6.6)$$

La soluzione di questa equazione può essere espressa nella forma

$$\varphi = \varphi'(x, r) + \varphi''(x, r, \vartheta) \quad (6.7)$$

cioè come la sovrapposizione di un flusso di perturbazione assiale definito da φ' e di un flusso di perturbazione trasversale definito da φ'' . Il potenziale assiale φ' deve soddisfare l'equazione

$$\beta^2 \varphi'_{,xx} - \varphi'_{,rr} - \frac{1}{r} \varphi'_{,r} = 0 \quad (6.8)$$

avendo posto $\beta = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$.

Si osservi che questa equazione che governa un flusso assialsimmetrico differisce dall'equazione (2.25) che governa un flusso piano solo per la presenza del termine $\frac{1}{r} \varphi_{,r}$.

Per quanto riguarda il flusso trasversale, la soluzione φ'' può essere immediatamente ottenuta in funzione di φ' mediante la relazione

$$\varphi'' = \varphi'_{,r} \cos \vartheta \quad (6.9)$$

Se infatti si sostituisce la (6.9) nella (6.6) si ottiene

$$\cos \vartheta \left[\beta^2 \varphi'_{,xxr} - \varphi'_{,rrr} + \frac{1}{r^2} \varphi'_{,r} - \frac{1}{r} \varphi'_{,rr} \right] = 0$$

che coincide con l'espressione che si ottiene derivando rispetto ad r la (6.8).

Nell'ambito dell'approssimazione delle piccole perturbazioni, il problema della soluzione di un flusso con incidenza su di un corpo assialsimmetrico si riduce essenzialmente alla soluzione del flusso assiale ed all'imposizione delle condizioni al contorno.

6.3 Flusso assialsimmetrico su un cono

Come si è visto, un flusso assialsimmetrico è governato dall'equazione bidimensionale (6.8). Poichè l'equazione è lineare è possibile utilizzare la sovrapposizione di soluzioni particolari al fine di soddisfare le condizioni al contorno. Una soluzione particolare della (6.8) è la soluzione *sorgente* data da

$$\varphi(x, r) = \int_0^{\xi_1} \frac{f(\xi)}{\sqrt{(x - \xi)^2 - \beta^2 r^2}} d\xi \quad (6.10)$$

Sostituendo quest'espressione nella (6.8) è facile verificare che l'equazione è soddisfatta qualunque sia la funzione $f(\xi)$. Si vede anche che per $x \rightarrow \infty$ ed $r \rightarrow \infty$, il potenziale di perturbazione tende a zero e la (6.10) soddisfa anche la condizione al contorno che il flusso all'infinito sia indisturbato.

La (6.10) fornisce il potenziale di perturbazione in un punto di coordinate x, r dovuto ad una distribuzione continua di sorgenti disposte sull'asse x ed aventi intensità variabile definita dalla $f(\xi)$. L'integrale è esteso dall'origine, ove ha inizio il corpo (Fig. 6.2), al punto

$$\xi_1 = x - \beta r \quad (6.11)$$

che rappresenta il massimo valore di ξ per il quale l'integrando è reale.

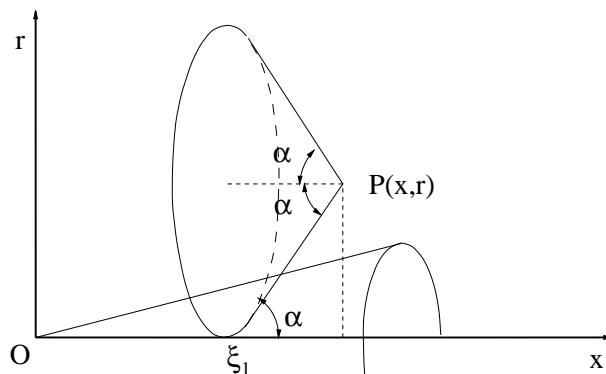


Figura 6.2:

Il limite ξ_1 ha però anche un significato fisico. Il punto P infatti è influenzato solo dalle sorgenti che si trovano all'interno dell'anti-cono di Mach passante

per il punto P stesso. Come si vede in Fig. 6.2, l'anti-cono interseca l'asse x nel punto ξ_1 tale che $(x - \xi_1) \tan \alpha = r$, che coincide con la definizione (6.11).

Introduciamo la variabile ausiliaria z , definita da

$$z = \cosh^{-1} \frac{x - \xi}{\beta r} \quad (6.12)$$

cosicchè

$$\xi = x - \beta r \cosh z \quad (6.13)$$

$$d\xi = -i\beta r \sinh z dz \quad (6.14)$$

Mediante queste ultime la (6.10) diviene

$$\varphi = \int_{\cosh^{-1} \frac{x}{\beta r}}^0 f(x - \beta r \cosh z) dz \quad (6.15)$$

Consideriamo ora il caso particolare in cui

$$f(\xi) = C\xi \quad (6.16)$$

essendo C una costante.

In questo caso l'integrale (6.15) può essere risolto in forma chiusa

$$\varphi = C \int_{\cosh^{-1} \frac{x}{\beta r}}^0 (x - \beta r \cosh z) dz = Cx \left[-\cosh^{-1} \frac{x}{\beta r} + \sqrt{1 - \frac{\beta^2 r^2}{x^2}} \right] \quad (6.17)$$

e le componenti dei disturbi di velocità risultano

$$\varphi_{,x} = C \int_{\cosh^{-1} \frac{x}{\beta r}}^0 dz = -C \cosh^{-1} \frac{x}{\beta r} \quad (6.18)$$

$$\varphi_{,r} = -C \int_{\cosh^{-1} \frac{x}{\beta r}}^0 \beta \cosh z dz = C\beta \sqrt{\frac{x^2}{\beta^2 r^2} - 1} \quad (6.19)$$

Queste relazioni mostrano che la velocità non dipende singolarmente dal valore di x ed r ma solo dal loro rapporto. La velocità è pertanto costante su tutte le rette passanti per l'origine ed il campo ha quindi una *simmetria conica*.

La soluzione particolare ottenuta può allora essere utilizzata per rappresentare il flusso su un cono a sezione circolare con l'asse parallelo alla direzione della corrente (Fig. 6.3).

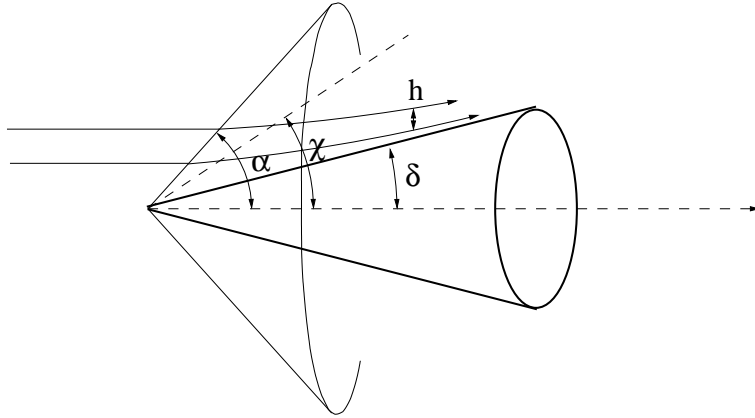


Figura 6.3:

Detto δ l'angolo di semi-apertura del cono, la costante C dovrà essere scelta in modo da soddisfare la condizione al contorno di tangenza della velocità alla parete, cioè

$$\delta = \frac{dr}{dx} = \frac{\varphi_{,r}}{1 + \varphi_{,x}}$$

Sostituendo in questa le (6.18) e (6.19) scritte per $\frac{r}{x} = \delta$, si ottiene

$$\delta = \frac{\frac{C}{\delta} \sqrt{1 - \beta^2 \delta^2}}{1 - C \cosh^{-1} \frac{1}{\beta \delta}} \quad (6.20)$$

da cui

$$C = \frac{\delta^2}{\sqrt{1 - \beta^2 \delta^2} + \delta^2 \cosh^{-1} \frac{1}{\beta \delta}} \quad (6.21)$$

Si osservi che affinché C sia reale, deve essere $\delta < 1/\beta$, ovvero l'angolo di semi-apertura del cono deve essere minore dell'angolo di Mach.

Si noti anche che, a differenza del caso piano, il flusso nella regione perturbata (compresa fra il cono di Mach e la superficie del cono) non è un flusso uniforme. I disturbi di velocità, che sono nulli per $\chi = \alpha$ (che corrisponde a $x/\beta r = 1$), hanno intensità crescente man mano che χ diminuisce ($x/\beta r$ crescente), fino ad assumere il valore massimo (in modulo) in corrispondenza alla superficie del cono. Le linee di corrente pertanto non sono nè rette, nè fra loro parallele ma tendono tutte asintoticamente alla superficie del corpo.

Il modulo della velocità è dato da

$$V^2 = (1 + \varphi_{,x})^2 + \varphi_{,r}^2 \simeq 1 + 2\varphi_{,x}$$

Pertanto, essendo $\varphi_{,x}$ negativo, la velocità lungo una linea di corrente diminuisce spostandosi dal cono di Mach verso la superficie del corpo ed il flusso quindi si comprime. Mentre nel caso piano la compressione avviene attraverso l'onda di Mach e la pressione resta costante nella regione compresa fra l'onda di Mach ed il corpo, nel caso assialsimmetrico la compressione avviene con continuità in tutta la regione a valle del cono di Mach. Il fatto che la distanza h fra due linee di corrente diminuisca al crescere di x può anche essere spiegato da un punto di vista fisico. Le due superfici di rivoluzione, definite da due generiche linee di corrente quali quelle indicate in Fig. 6.3, delimitano un tubo di flusso attraverso il quale la portata deve mantenersi costante. Poiché la portata può essere espressa in prima approssimazione come

$$Q = \rho_\infty V_\infty 2\pi r h$$

è evidente che al crescere di r deve diminuire h in modo che la sezione del tubo di flusso rimanga costante.

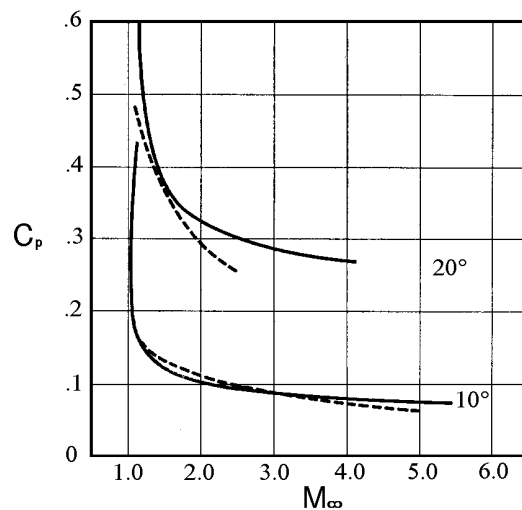


Figura 6.4:

Sostituendo la (6.21) nella (6.18) è poi possibile determinare il coefficiente di pressione sulla superficie del cono che risulta

$$C_p = -2\varphi_{,x} = \frac{2}{1 + \frac{\sqrt{1 - \beta^2 \delta^2}}{\delta^2 \cosh^{-1} \frac{1}{\beta \delta}}} \quad (6.22)$$

I valori calcolati con questa espressione sono riportati in Fig. 6.4 (linee tratteggiate) e confrontati con i risultati della teoria esatta (linee a tratto continuo).

Come si vede il metodo delle piccole perturbazioni approssima sufficientemente la teoria esatta nel caso di $\delta = 10^\circ$, mentre già per un angolo di 20° i risultati differiscono notevolmente.

6.4 Flussi assialsimmetrici su corpi affusolati

Consideriamo un corpo di rivoluzione appuntito e di piccolo spessore come quello rappresentato in Fig. 6.5.

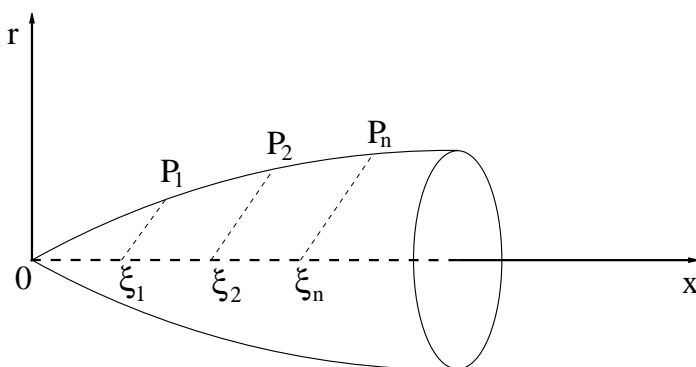


Figura 6.5:

Nel caso di incidenza nulla il flusso è assialsimmetrico. Poichè la soluzione (6.15) soddisfa l'equazione (6.8) che governa il flusso, il problema si riduce alla determinazione della funzione $f(\xi)$ in modo da soddisfare la condizione al contorno in ogni punto della superficie del corpo. Ciò può essere ottenuto mediante la semplice sovrapposizione di soluzioni coniche come la (6.17). Per ogni punto P_n di coordinate x_n e r_n si può calcolare il valore

$$\xi_n = x_n - \beta r_n$$

in cui l'anticono di Mach per il punto P_n interseca l'asse delle ascisse.

Se sostituiamo il tratto di superficie OP_1 con il cono passante per P_1 , la soluzione conica è data come si è visto da una distribuzione di sorgenti di intensità $C_1\xi$ disposte nel tratto $0 - \xi_1$. La velocità radiale nel punto P_1 è data da

$$V_{r1} = C_1\beta\sqrt{\frac{x_1^2}{\beta^2 r_1^2} - 1}$$

e la costante C_1 viene determinata imponendo la condizione di tangenza nel punto P_1 , ovvero

$$\frac{r_1}{x_1} = V_{r1}$$

nella quale si è posto $1 + V_{x1} \simeq 1$ in base all'ipotesi di piccole perturbazioni.

Per soddisfare la condizione al contorno nel punto P_2 , sovrapponiamo alla soluzione così ottenuta una nuova distribuzione di sorgenti di intensità $C_2\xi$ disposte lungo l'asse x nel tratto $\xi_1 - \xi_2$. La velocità radiale nel punto P_2 è data da

$$V_{r2} = C_1\beta\sqrt{\frac{x_2^2}{\beta^2 r_2^2} - 1} + C_2\beta\sqrt{\frac{(x_2 - \xi_1)^2}{\beta^2 r_2^2} - 1}$$

Poichè la costante C_1 è già nota, la costante C_2 può essere determinata imponendo la condizione di tangenza nel punto P_2

$$V_{r2} = \left(\frac{dr}{dx}\right)_{P_2}$$

Estendendo il procedimento ad un generico punto P_n si ha

$$\begin{aligned} V_{xn} &= -\sum_{i=1}^n C_i \cosh^{-1}\left(\frac{x_n - \xi_{i-1}}{\beta r_n}\right) \\ V_{rn} &= \sum_{i=1}^n C_i \beta \sqrt{\frac{(x_n - \xi_{i-1})^2}{\beta^2 r_n^2} - 1} \end{aligned}$$

Le costanti C_i vengono determinate in sequenza, e quindi indipendentemente una dall'altra, imponendo la condizione di tangenza nei punti P_1, \dots, P_n . Ciò è dovuto al fatto che, essendo il problema iperbolico, il disturbo di velocità in un punto dipende solo dalle sorgenti che si trovano a monte. Viceversa nell'applicazione del metodo delle sorgenti in campo subsonico, per il quale il problema è ellittico, il disturbo in un punto dipende da tutte le sorgenti presenti, la cui intensità deve perciò essere determinata contemporaneamente, risolvendo un sistema di equazioni algebriche.

6.5 Il metodo delle caratteristiche per flussi assial-simmetrici

Quando non si possa adottare l'ipotesi di piccole perturbazioni, bisogna far ricorso all'equazione completa del potenziale (6.2), la quale peraltro nel caso assialsimmetrico, essendo nulle le derivate rispetto a ϑ , risulta

$$\left(\phi_{,x}^2 - a^2\right)\phi_{,xx} + 2\phi_{,x}\phi_{,r}\phi_{,xr} + \left(\phi_{,r}^2 - a^2\right)\phi_{,rr} = \frac{a^2}{r}\phi_{,r} \quad (6.23)$$

A parte l'uso della variabile r al posto di y , quest'equazione differisce dalla (2.17), valida per il caso piano, solo per la presenza del termine a secondo membro.

Adottando la notazione

$$\begin{aligned} u &= V_x = \varphi_{,x} \\ v &= V_r = \varphi_{,r} \end{aligned}$$

la (6.23) può essere scritta nella forma

$$u_{,x} + \frac{2uv}{u^2 - a^2}u_{,r} + \frac{v^2 - a^2}{u^2 - a^2}v_{,r} = \frac{a^2}{u^2 - a^2}\frac{v}{r} \quad (6.24)$$

che assieme alla condizione di irrotazionalità

$$v_{,x} - u_{,r} = 0 \quad (6.25)$$

costituisce un sistema del tutto identico alle (3.1) e (3.2), tranne per il fatto di non essere omogeneo. La non omogeneità del sistema ha però la conseguenza che esso non è riducibile.

Se riscriviamo il sistema nella forma

$$\mathbf{v}_{,x} + A\mathbf{v}_{,r} = \mathbf{b}$$

con

$$\mathbf{b} = \left| \begin{array}{c} \frac{a^2}{u^2 - a^2}\frac{v}{r} \\ 0 \end{array} \right|$$

è immediato verificare che la matrice A è identica a quella che si aveva nel caso piano e identici sono pertanto anche gli autovalori e gli autovettori.

Le equazioni delle linee caratteristiche sono quindi le stesse del caso piano

$$\frac{dr}{dx} = \frac{uv \mp a^2\sqrt{M^2 - 1}}{u^2 - a^2} \quad (6.26)$$

Viceversa il termine di non omogeneità modifica le equazioni di compatibilità che, analogamente alla (3.47), possono essere scritte come

$$l_{i1} \frac{du}{dx} + l_{i2} \frac{dv}{dx} = l_{i1} b_1 \quad \text{lungo } C_i \quad (6.27)$$

o anche

$$du + \frac{l_{i2}}{l_{i1}} dv = b_1 \frac{dr}{\lambda_i} \quad \text{lungo } C_i \quad (6.28)$$

Sostituendo in questa le espressioni degli autovalori ed autovettori, si ottiene

$$\frac{du}{dv} = -\frac{uv \pm a^2 \sqrt{M^2 - 1}}{u^2 - a^2} + \frac{1}{\frac{uv}{a^2} \mp \sqrt{M^2 - 1}} \frac{v}{r} \frac{dr}{dv}$$

Come nel caso piano, è conveniente esprimere le equazioni delle caratteristiche e di compatibilità in termini di V e ϑ anzichè u e v . Procedendo analogamente a quanto visto nel §8.1, si ottiene

$$\frac{dr}{dx} = \tan(\vartheta \mp a) \quad (6.29)$$

$$d\vartheta = \mp d\omega \pm \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1} \mp \cot \vartheta} \frac{dr}{r} \quad (6.30)$$

Come si vede in questo caso le equazioni di compatibilità non possono essere risolte indipendentemente e una volta per tutte. La dipendenza da r della (6.30) obbliga a risolvere contemporaneamente le (6.29) e (6.30) con una procedura iterativa. Ad esempio per calcolare il punto 3 di Fig. 6.6 in base ai valori noti nei punti 1 e 2, si calcola un valore di prima approssimazione per ϑ_3 e M_3 risolvendo il sistema

$$\begin{aligned} \vartheta_3 - \vartheta_1 &= \omega_3 - \omega_1 \\ \vartheta_3 - \vartheta_2 &= -\omega_3 + \omega_2 \end{aligned} \quad (6.31)$$

cioè trascurando il termine dipendente da r , come se il flusso fosse piano.

Si calcola quindi il valore di x_3 ed r_3 dal sistema

$$\begin{aligned} \frac{r_3 - r_1}{x_3 - x_1} &= [\tan(\vartheta + \alpha)]_1^3 \\ \frac{r_3 - r_2}{x_3 - x_2} &= [\tan(\vartheta - \alpha)]_2^3 \end{aligned} \quad (6.32)$$

dove con la notazione $[\]_j^i$ si indica la media aritmetica della funzione calcolata nei punti i e j .

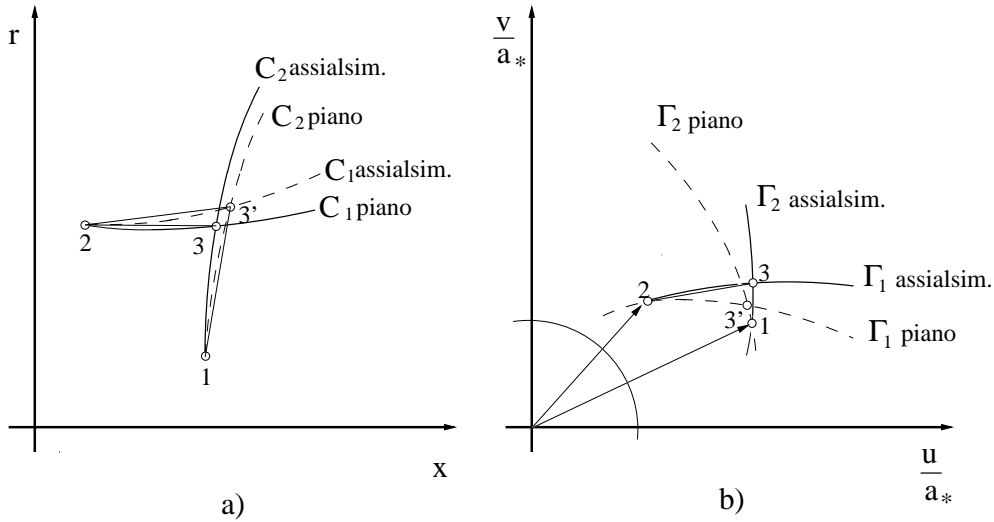


Figura 6.6:

Noto r_3 , si può ottenere il nuovo valore di ϑ_3 e ω_3 risolvendo il sistema

$$\begin{aligned} \vartheta_3 - \vartheta_1 &= \omega_3 - \omega_1 - \frac{1}{\left[\sqrt{M^2 - 1} + \cot \vartheta\right]_1^3} \ln \frac{r_3}{r_1} \\ \vartheta_3 - \vartheta_2 &= -\omega_3 + \omega_2 + \frac{1}{\left[\sqrt{M^2 - 1} + \cot \vartheta\right]_2^3} \ln \frac{r_3}{r_2} \end{aligned} \quad (6.33)$$

Infine si aggiornano i valori di x_3 ed r_3 risolvendo nuovamente le (6.32).

Pur essendo più laborioso che nel caso piano, il metodo delle caratteristiche consente di risolvere problemi di notevole interesse applicativo quale ad esempio il flusso nel divergente di un ugello assialsimmetrico.

6.6 Urti conici

Consideriamo nuovamente il flusso ad incidenza nulla su di un cono a sezione circolare, nel caso in cui l'angolo di semiapertura sia abbastanza grande da non consentire l'ipotesi di piccole perturbazioni.

Il flusso è del tutto simile a quello di Fig. 6.3, solo che, essendo l'angolo δ finito, dal vertice del cono ha origine non più un cono di Mach ma un'onda d'urto conica attraverso la quale si verificano una compressione ed una variazione di direzione finite, in modo analogo a quanto visto nel caso piano. Naturalmente l'angolo di semiapertura dell'urto conico non è più α ma avrà un valore $\sigma > \alpha$.

Non esiste una soluzione matematica delle equazioni di conservazione in coordinate cilindriche o sferiche che consenta di ottenere le relazioni di salto

attraverso un urto conico. Tuttavia è ragionevole assumere, ed è stato confermato sperimentalmente, che l'urto conico si comporti localmente come un urto piano, essendo lo spessore dell'urto molto piccolo rispetto al raggio di curvatura dell'urto conico. Le proprietà del flusso a valle dell'urto possono allora essere ottenute in funzione di quelle a monte mediante le relazioni di salto per un urto piano che sia localmente tangente alla superficie dell'urto conico. Conoscendo il valore di σ e di M_∞ è possibile determinare anche la direzione della corrente a valle dell'urto che però non coincide con la direzione δ del corpo in quanto, come nel caso linearizzato, il flusso nella regione compresa fra l'urto ed il corpo non è uniforme. Il problema è quello di determinare la soluzione in tale regione. Poichè l'urto ha in ogni punto lo stesso angolo σ , la sua intensità è costante ed il flusso a valle dell'urto è quindi omentropico ed omentalpico se tale era a monte. Il flusso è pertanto governato dall'equazione (2.12) e dalla condizione di irrotazionalità.

Poichè il flusso è a simmetria conica, è conveniente scrivere queste equazioni nelle coordinate sferiche r, ϑ, φ (Fig. 6.7).

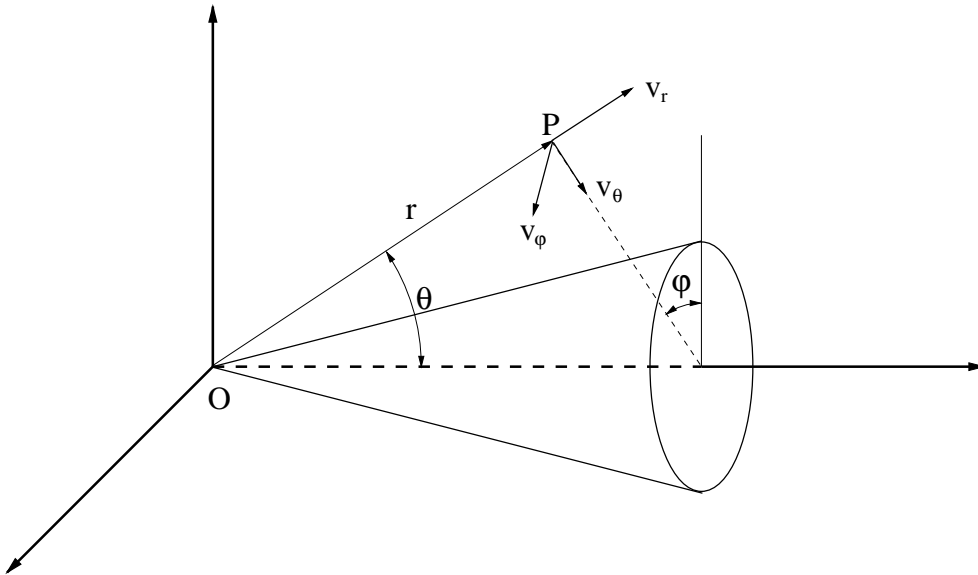


Figura 6.7:

Per le coordinate sferiche valgono le espressioni

$$\begin{aligned}\mathbf{V} \cdot \nabla &= V_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{V_\vartheta}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{V_\varphi}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \nabla \cdot \mathbf{V} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (V_\vartheta \sin \vartheta) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}\end{aligned}\quad (6.34)$$

Poichè il flusso è assialsimmetrico $V_\varphi = 0$ e $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$. Inoltre essendo il flusso a simmetria conica le proprietà del flusso sono costanti lungo tutte le rette passanti per l'origine e quindi $\frac{\partial}{\partial r} = 0$.

Con queste semplificazioni, sostituendo le (6.34) nella (2.12) si ottiene

$$V_r V_\vartheta \frac{dV_r}{d\vartheta} + V_\vartheta^2 \frac{dV_\vartheta}{d\vartheta} = a^2 \left(2V_r + V_\vartheta \cot \vartheta + \frac{dV_\vartheta}{d\vartheta} \right) \quad (6.35)$$

mentre la condizione di irrotazionalità risulta

$$V_\vartheta - \frac{dV_r}{d\vartheta} = 0 \quad (6.36)$$

Sostituendo nella (6.35) la (6.36) assieme alla relazione

$$a^2 = a_\infty^2 + \delta (V_\infty^2 - V_r^2 - V_\vartheta^2)$$

si ottiene

$$\left(\frac{dV_r}{d\vartheta} \right)^2 \left(V_r + \frac{d^2 V_r}{d\vartheta^2} \right) = \left\{ a_\infty^2 + \delta \left[V_\infty^2 - V_r - \left(\frac{dV_r}{d\vartheta} \right)^2 \right] \right\} \left(2V_r + \frac{dV_r}{d\vartheta} \cot \vartheta + \frac{d^2 V_r}{d\vartheta^2} \right) \quad (6.37)$$

Questa è un'equazione differenziale del secondo ordine alle derivate ordinarie che può essere risolta iterativamente con un'integrazione al passo. Assumendo ad esempio un valore di primo tentativo σ' per la posizione dell'urto, si determinano mediante le relazioni di salto per un urto obliquo i valori di V_r e V_ϑ a valle dell'urto (che corrispondono rispettivamente alla velocità tangenziale ed a quella normale). Con questi valori iniziali si integra la (6.37) per ϑ che varia da σ' a δ . In corrispondenza al corpo ($\vartheta = \delta$) si verifica se è soddisfatta la condizione al contorno, ovvero $V_\vartheta = 0$. Se la condizione non è soddisfatta, si modifica la posizione dell'urto e si integra nuovamente la (6.37).

Con questo metodo di soluzione, che prende il nome di *soluzione di Taylor e Maccoll*, è possibile determinare l'angolo σ per ogni coppia di valori M_∞, δ . I valori così ottenuti sono riportati in Fig. 6.8a che è del tutto analoga alla Fig. 9.3 per il caso piano.

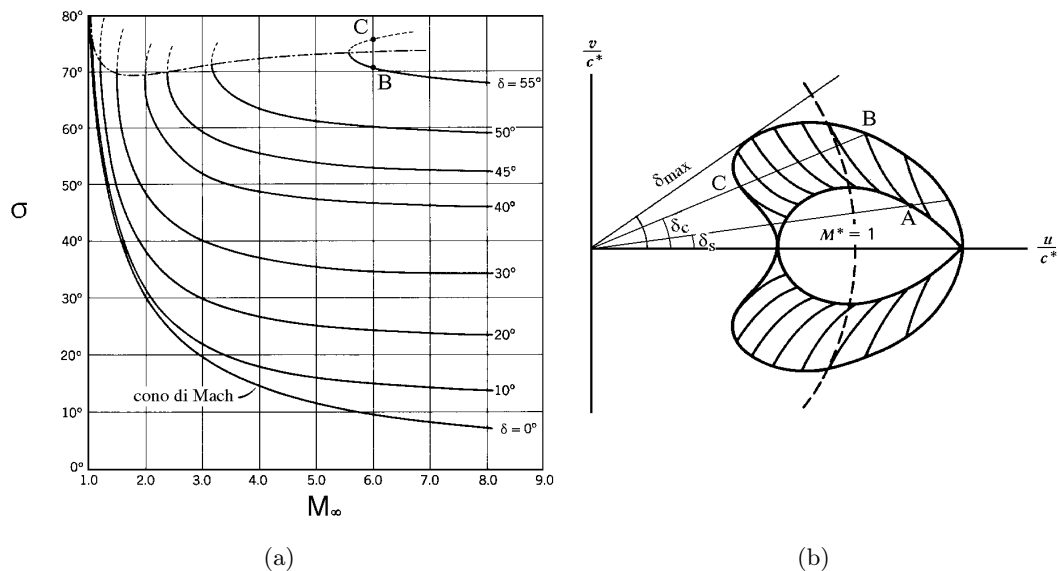


Figura 6.8:

Il flusso nella regione compresa fra l'urto e la superficie del cono può essere descritto attraverso la rappresentazione sul piano odografo (Fig. 6.8b).

Il punto A sulla polare dell'urto rappresenta in direzione e modulo la velocità a valle dell'urto. Poiché la deviazione della corrente attraverso l'urto δ_s è minore della pendenza del cono δ_c , l'angolo δ che la corrente forma con l'asse x aumenta man mano che ci si sposta dall'urto al corpo. Riportando per ogni valore di $\delta_s < \delta < \delta_c$ un vettore avente modulo pari alla velocità determinata dalla soluzione di Taylor e Maccoll, si ottiene la curva AB che rappresenta tutti gli stati compresi fra l'urto ed il corpo. In particolare si osserva che muovendosi dall'urto (A) al corpo (B) la velocità diminuisce ed il fluido subisce quindi una compressione.

Facendo poi muovere il punto A lungo la polare dell'urto, il punto B che rappresenta la velocità sulla superficie del cono descrive la curva rappresentata in Fig. 6.8b che, per la sua forma, è detta *mela di Busemann*.

Come si può rilevare dalle Fig. 6.8a e 6.8b anche nel caso conico per ogni valore di M_∞ esiste un valore massimo di δ_c per il quale si può avere un'urto attaccato. Per $\delta_c < \delta_{max}$ inoltre si hanno due soluzioni che corrispondono al caso di urto debole (B) e urto forte (C). Tuttavia nel caso conico la soluzione di urto forte esiste solo per un cono di lunghezza infinita. Nella realtà invece il corpo deve avere una lunghezza finita e deviare quindi dalla forma conica ad una certa distanza dalla punta del cono. La modifica del flusso in questa zona, essendo il flusso subsonico, si risente anche nella parte anteriore ed il

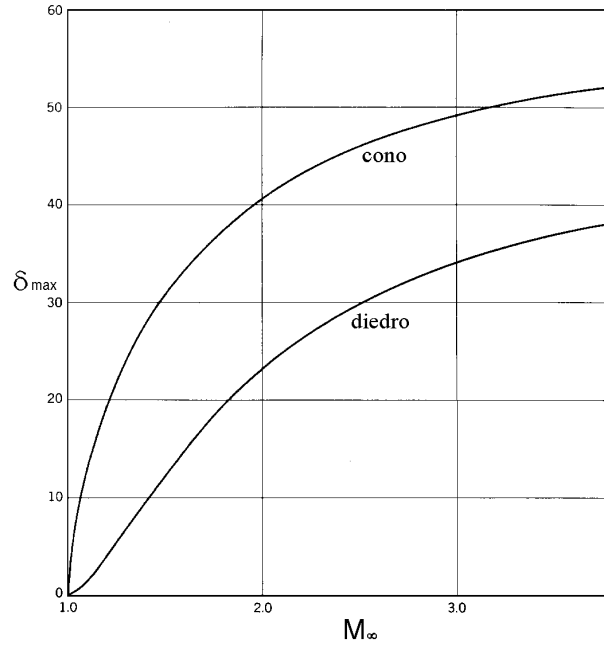


Figura 6.9:

flusso quindi non è più conico, come si era supposto all'inizio della trattazione. Pertanto quando il flusso a valle dell'urto è subsonico, l'urto non è conico ma è un'urto curvo.

Poichè il valore di δ_c è sempre maggiore di δ_s , a parità di numero di Mach, il valore massimo del semiangolo di apertura del cono per il quale si può avere un'urto attaccato è maggiore del corrispondente valore nel caso piano (Fig. 6.9).

Si osservi infine che nel caso conico la compressione avviene in parte attraverso l'urto ed in parte, isentropicamente, fra l'urto ed il corpo. Pertanto, a parità di angolo del corpo, la compressione conica è più efficiente che nel caso piano.