Capitolo 4

Metodo di soluzione alla *Navier*

4.1 Piastra rettangolare appoggiata al contorno

Si consideri la piastra rettangolare, di lati a e b, appoggiata al contorno, caricata con un carico distribuito $p(x, y)$ indicata in Figura 4.1

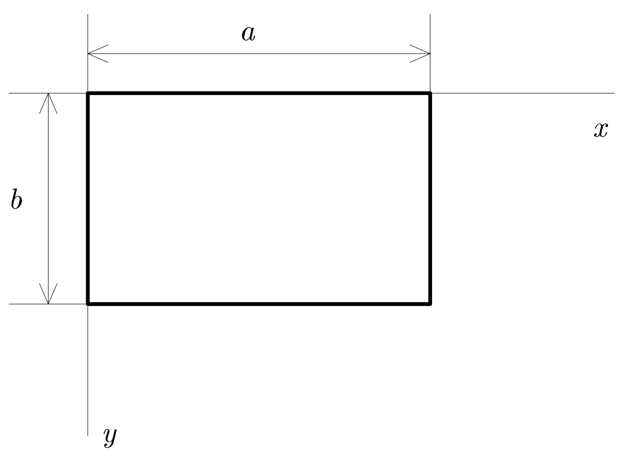

Figura 4.1: Piastra rettangolare appoggiata al contorno

Nel 1820 *Navier* ha proposto la soluzione di questo problema basata sullo sviluppo in serie di *Fourier* del carico applicato e della funzione incognita $w(x, y)$ con le posizioni:

$$
\begin{aligned}
p(x,y) &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \sin\frac{m\pi}{a}x \sin\frac{n\pi}{b}y \\
w(x,y) &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin\frac{m\pi}{a}x \sin\frac{n\pi}{b}y
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

dove p_{mn} e a_{mn} sono dei coefficienti incogniti da determinare. La condizione al contorno di appoggio semplice si traduce nelle condizioni:

$$
x = 0, \quad x = a \quad \rightarrow \begin{cases} w = 0 \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \end{cases}
$$

$$
y = 0, \quad y = b \quad \rightarrow \begin{cases} w = 0 \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \end{cases}
$$

La determinazione dei coefficienti p_{mn} relativi alla condizione del carico applicato si ottiene procedendo alla *Fourier*, cioè moltiplicando per $\sin\frac{m'\pi}{a}x \sin\frac{n'\pi}{b}ydxdy$ ed integrando sulla piastra:

$$
\int_0^b\int_0^a p(x,y)\sin\frac{m'\pi}{a}x\sin\frac{n'\pi}{b}ydxdy = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} p_{mn}\int_0^b\int_0^a \sin\frac{m'\pi}{a}x\sin\frac{n'\pi}{b}ydxdy
$$

si ottiene:

$$
p_{mn} = \frac{4}{ab}\iint_A p(x,y)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}ydA
$$

i coefficienti della deflessione a_{mn} si ottengono dall'imporre l'equazione del campo:

$$
\nabla^4 w = \frac{p}{D}
$$

si ha:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_{mn}\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4+2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^4\right]-\frac{p_{mn}}{D}\right\}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y=0$$

Questa relazione vale per ogni x e y e quindi deve risultare:

$$a_{mn}\pi^4\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2=\frac{p_{mn}}{D}$$

Sostituendo i coefficienti a_{mn} nello sviluppo della deflessione, si ha:

$$w(x,y)=\frac{1}{\pi^4 D}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_{mn}}{\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right]^2}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y$$

dove i coefficienti p_{mn} vengono determinati alla *Fourier* a seconda del carico applicato; si può dimostrare che la serie ottenuta è una serie convergente e costituisce quindi una soluzione per il problema della flessione di una piastra rettangolare semplicemente appoggiata al contorno.

Nel caso in cui il carico applicato sia distribuito in modo uniforme sulla struttura:

$$p(x,y)=p_0$$

si ha:

$$p_{mn}=\frac{16p_0}{\pi^2 mn};\qquad\qquad m,n=1,3,5,\cdots$$

i coefficienti sono nulli per indice m od n pari e ponendo questa espressione nella serie che dà la deflessione, si ha:

$$w(x,y)=\frac{16p_0}{\pi^6 D}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{mn}\frac{\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y}{\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right]^2};\qquad\qquad m,n=1,3,5,\cdots$$

Dalla deflessione è possibile ricavare gli sviluppi in serie relativi ai momenti M_x, M_{xy}, M_y. Si ha, per esempio:

$$M_x = \frac{16p_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \nu \left(\frac{n}{b}\right)^2}{mn\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right]^2} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y$$

ed analogamente per M_y e M_{xy}. Si osserva come M_x e M_y sono rispettivamente nulli sul contorno per $x = 0$, $x = a$, $y = o$, $y = b$, mentre il momento torcente non si annulla al contorno della piastra.

Nel caso di piastra quadrata, $a = b = a^*$, appoggiata al contorno e con carico distribuito uniformemente, considerando soltanto il primo termine nello sviluppo in serie della deflessione e riferendosi al centro della piastra, si ha:

$$w\left(\frac{a^*}{2}, \frac{a^*}{2}\right) = 0.00416 \ \frac{p_0 {a^*}^4}{D}$$

se invece si considerano i primi quattro termini dello sviluppo in serie si ha:

$$w\left(\frac{a^*}{2}, \frac{a^*}{2}\right) = 0.00406 \ \frac{p_0 {a^*}^4}{D} \qquad \begin{pmatrix} m = 1, & n = 1, 3 \\ m = 3, & n = 1, 3 \end{pmatrix}$$

con una differenza tra le due approssimazioni che è molto limitata. Se si considera invece il valore dei momenti relativi ad uno sviluppo in serie con il solo primo termine si ha:

$$M_{x^{max}} = M_{y^{max}} = 0.0534 \ p_0 {a^*}^2$$

mentre se si considerano i primi quattro termini dello sviluppo in serie si ha:

$$M_x = M_y = 0.0469 \ p_0 {a^*}^2$$

come si vede la convergenza della serie nel caso in cui si valutino i momenti flettenti risulta molto più lenta rispetto al caso della deflessione.

4.2 Piastra ortotropa rettangolare appoggiata al contorno

L'approccio alla *Navier* che si è utilizzato nel caso di una piastra isotropa può essere utilizzato anche nel caso di piastra ortotropa. Con riferimento ad una piastra rettangolare di lati a e b con un carico per unità di superficie $p(x,y)$ e con condizioni al contorno di appoggio semplice, si può cercare la soluzione con lo sviluppo proposto nell'equazioni 4.1, le quali, sostituite nell'equazione della piastra 3.3, si ottiene:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_{mn}\left(\frac{m^4\pi^4}{a^4}D_x + 2\frac{m^2n^2\pi^4}{a^2b^2}H + \frac{n^4\pi^4}{b^4}D_y\right) - p_{mn}\right]\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y = 0$$

Questa relazione deve valere per ogni x, y e quindi se si impone l'annullarsi dei termini tra parentesi quadrata, si ottiene la relazione che collega i coefficienti, incogniti, dello sviluppo di $w(x,y)$ con quelli, noti, dello sviluppo del carico assegnato:

$$a_{mn} = \frac{p_{mn}}{\left(\frac{m^4\pi^4}{a^4}\right)D_x + 2\left(\frac{m^2n^2\pi^4}{a^2b^2}\right)H + \left(\frac{n^4\pi^4}{b^4}\right)D_y}$$

i coefficienti dello sviluppo del carico assegnato sono dati dalla:

$$p_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a p(x,y)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y\ dxdy$$

per lo sviluppo della funzione incognita $w(x,y)$ si ha quindi:

$$w(x,y) = \frac{4}{ab}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^b\int_0^a \frac{p(x,y)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y}{\left(\frac{m^4\pi^4}{a^4}\right)D_x + 2\left(\frac{m^2n^2\pi^4}{a^2b^2}\right)H + \left(\frac{n^4\pi^4}{b^4}\right)D_y}\ dxdy\right)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y$$

nel caso particolare in cui il carico assegnato sia uniformemente distribuito sulla superficie della piastra $p(x,y) = p_0$ si ha l'espressione, precedentemente utilizzata, per i coefficienti dello sviluppo:

$$p_{mn} = \frac{16p_0}{\pi^2 mn}; \qquad\qquad m, n \text{ dispari}$$

e quindi si ottiene per lo spostamento verticale l'espressione:

$$w(x,y) = \frac{16p_0}{\pi^6}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y}{mn\left[\left(\frac{m^4}{a^4}\right)D_x + 2\left(\frac{m^2n^2}{a^2b^2}\right)H + \left(\frac{n^4}{b^4}\right)D_y\right]}$$

una volta calcolata la $w(x,y)$ si possono poi ricavare i momenti e gli sforzi.