Facoltà di Ingegneria Civile e Industriale

Sapienza Università di Roma

Elaborato finale per il conseguimento della Laurea
in Ingegneria meccanica (sede di Roma)
Finito di elaborare il 10/12/2012

Costruzione automatica della matrice jacobiana da impiegare nella simulazione dinamica

Daniele Ferrante

Relatore: Prof. Nicola Pio Belfiore

Disciplina: Meccanica applicata alle macchine ING-IND13

Abstract. E' fondamentale conoscere la matrice jacobiana e il vettore $\{\gamma\}$ associati ad un meccanismo per un determinato intervallo di tempo per poter scrivere il sistema di equazioni differenziali della dinamica analitica e quindi procedere alla simulazione numerica. Oltre al noto metodo analitico per calcolare i sopracitati, è utile e di più immediata applicazione utilizzare un metodo automatico. Gli elementi dello jacobiano e di $\{\gamma\}$, infatti, si possono scrivere solo conoscendo il tipo di vincolo che lega due corpi e altri parametri di carattere geometrico(per esempio le coordinate locali della cerniera) e cinematico(per esempio velocità angolari dei corpi) senza dover effettuare alcuna derivata(necessaria nel metodo analitico). Proprio grazie a questa loro caratteristica è possibile automatizzarne il processo di compilazione attraverso un codice numerico.

1. Introduzione

Dopo lo sviluppo del calcolatore sono state studiate numerose metodologie di elaborazione numerica per la risoluzione di sistemi meccanici di cui probabilmente la più diffusa è quella del '*multibody*' . Questo metodo consente di pervenire in maniera sistematica alle equazioni della dinamica di una larga classe di sistemi meccanici; data la complessità di alcune matrici che compongono il sistema che ci si trova a risolvere, come ad esempio lo Jacobiano $[\psi_q]$,uno dei problemi è riuscire a scrivere tale sistema di equazioni algebrico differenziali in modo automatico. Basandomi sul testo: "Computer-Aided Analysis of Mechanical Systems" del prof. *Parviz E. Nikravesh* , presento un metodo per compilare la matrice Jacobiano e il vettore $\{\gamma\}$ del sistema(a) della meccanica analitica basato sulle equazioni cardinali.

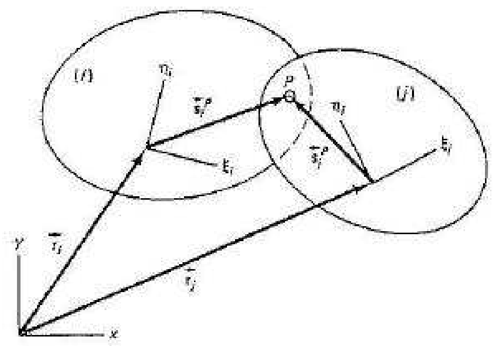
$$\begin{cases} [M]\{\ddot{q}\} + [\psi_q]^T\{\lambda\} = \{Q\} \\ [\psi_q]\{\ddot{q}\} = \{\gamma\} \end{cases} \qquad \text{(a)}$$

Tale metodo ,valido per meccanismi piani, prevede l'uso di coordinate assolute(ascisse e ordinate dei baricentri dei corpi e angoli delle aste) ossia rispetto ad un riferimento solidale al telaio, che si considera come primo

elemento nella catena cinematica, e tiene conto dell' impiego dei vincoli 'coppia rotoidale' e 'coppia prismatica' per la realizzazione di tali meccanismi.
Il primo 'step' per la comprensione di tale metodo è vedere come gli elementi dello jacobiano, che si ottengono dalla derivazione delle equazioni dei vincoli sopracitati rispetto alle coordinate assolute dei corpi, dipendano essenzialmente dalla geometria del sistema.

COPPIA ROTOIDALE

Per la cerniera (che supponiamo essere il vincolo m-mo della nostra catena cinematica),si considerano come corpi vincolati i e j generici, mentre ξ_i e η_i , ξ_j e η_j sono rispettivamente ascisse e ordinate locali della stessa(cioè rispetto ad un sistema di riferimento solidale al corpo i-mo e j-mo). Ognuno dei due corpi sarà caratterizzato da tre coordinate lagrangiane sovrabbondati del tipo x_i, y_i, φ_i, e x_j, y_j, φ_j , ad ognuna delle quali corrisponderà l'etichetta q_{3i-2}, q_{3i-1}, q_{3i} e q_{3j-2}, q_{3j-1}, q_{3j} .



Dati i vettori: $\vec{r_i} = \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix}$ (vettore posizione del baricentro di i) , $\vec{r_j} = \begin{Bmatrix} x_j \\ y_j \end{Bmatrix}$ (vettore posizione del baricentro di j), $\overrightarrow{s_i^P} = \begin{Bmatrix} \xi i \\ \eta i \end{Bmatrix}$ (vettore posizione della cerniera P nel sistema di riferimento solidale ad i) e $\overrightarrow{s_j^P} = \begin{Bmatrix} \xi j \\ \eta j \end{Bmatrix}$ (vettore posizione della cerniera P nel sistema di riferimento solidale ad j) si impone (come si evince dalla figura)

$$\vec{r_i} + \overrightarrow{s_i^P} - \vec{r_j} - \overrightarrow{s_j^P} = 0$$

e operando un cambiamento di coordinate da locali ad assolute per i vettori $\overrightarrow{s_i^P}$ e $\overrightarrow{s_j^P}$ tramite una rotazione rigida si ha

$$\vec{r_i} + A_i\overrightarrow{s_i^P} - \vec{r_j} - A_j\overrightarrow{s_j^P} = 0$$

Con

$$A_i = \begin{bmatrix} cos\varphi_i & -sen\varphi_i \\ sen\varphi_i & cos\varphi_i \end{bmatrix}$$

$$A_j = \begin{bmatrix} cos\varphi_j & -sen\varphi_j \\ sen\varphi_j & cos\varphi_j \end{bmatrix}$$

E quindi si ottengono le seguenti equazioni di vincolo:

$$\begin{cases} 2m-1: \quad x_i + \xi_i \cos\varphi_i - \eta_i \operatorname{sen}\varphi_i - x_j - \xi_j \cos\varphi_j + \eta_j \operatorname{sen}\varphi_j = 0 \\ 2m \quad : \quad y_i + \xi_i \operatorname{sen}\varphi_i + \eta_i \cos\varphi_i - y_j - \xi_j \operatorname{sen}\varphi_j - \eta_j \cos\varphi_j = 0 \end{cases}$$

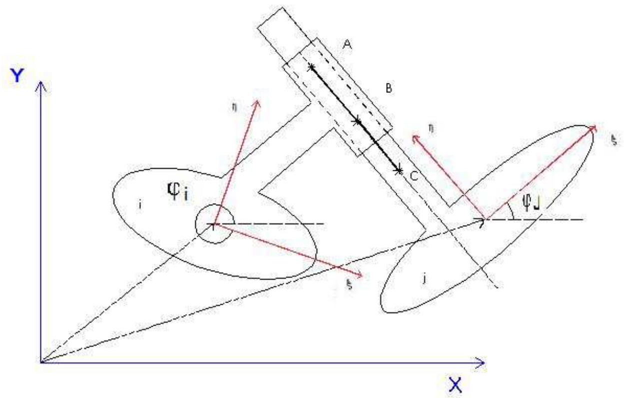
Le posizioni all'interno dello jacobiano, relative a tale vincolo e ai corpi i-mo e j-mo (3 colonne per ogni corpo poiché ad ognuno sono associate 3 coordinate assolute), dovranno essere riempite dagli elementi della matrice (1) ottenuti derivando 2m-1 ed 2m rispetto alle coordinate sovrabbondanti.

$$\begin{array}{c|ccccccccc} & \cdots & q_{3i-2} & q_{3i-1} & q_{3i} & \cdots & q_{3j-2} & q_{3j-1} & q_{3j} & \cdots \\ \hline 2m-1 & \cdots & 1 & 0 & -\xi_i \operatorname{sen}\varphi_i - \eta_i \cos\varphi_i & \cdots & -1 & 0 & \xi_j \operatorname{sen}\varphi_j + \eta_j \cos\varphi_j & \cdots \\ 2m & \cdots & 0 & 1 & \xi_i \cos\varphi_i - \eta_i \operatorname{sen}\varphi_i & \cdots & 0 & -1 & -\xi_j \cos\varphi_j + \eta_j \operatorname{sen}\varphi_j & \cdots \end{array}$$

(1)

COPPIA PRISMATICA

Consideriamo ora una guida prismatica (che supponiamo essere il nostro nuovo vincolo m-mo) associata a due corpi generici i e j .Detti B e A due punti generici appartenenti all' i-mo corpo (con ξ_A, η_A e ξ_B, η_B le coordinate di A e B nel riferimento locale solidale a i) e C un punto di j tali da appartenere ad un asse parallelo alla direzione di traslazione consentita dalla guida(vedi figura),



le due equazioni di vincolo si ottengono, la prima imponendo $\overrightarrow{AB}\ X\ \overrightarrow{BC} = 0$,con $\overrightarrow{AB} = \begin{Bmatrix} (x_B - x_A) \\ (y_B - y_A) \end{Bmatrix}$ e $\overrightarrow{BC} = \begin{Bmatrix} (x_C - x_B) \\ (y_C - y_B) \end{Bmatrix}$, e la seconda considerando che la differenza di assetto,poiché non sono consentite rotazioni, rimane costante. Bisogna notare che dal prodotto vettoriale si ottiene l' espressione (in coordinate assolute dei punti A, B e C):

$$(x_B - x_A)\,(y_C - y_B) - (x_C - x_B)\,(y_B - y_A) = 0$$

Per far comparire le coordinate lagrangiane sovrabbondanti ,si ottiene tramite la matrice di rotazione associata al corpo i-mo:

$$\begin{Bmatrix} x_A \\ Y_A \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\varphi_i & -sin\varphi_i & x_i \\ sin\varphi_i & cos\varphi_i & y_i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_A \\ \eta_A \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x_B \\ Y_B \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\varphi_i & -sin\varphi_i & x_i \\ sin\varphi_i & cos\varphi_i & y_i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_B \\ \eta_B \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Facendo la differenza tra le ascisse e le ordinate si ricavano le espressioni:

$$(x_B - x_A) = -(\xi_T \cos\varphi_i - \eta_T \mathrm{sen}\varphi_i)$$
$$(y_B - y_A) = -(\xi_T \mathrm{sen}\varphi_i + \eta_T \cos\varphi_i)$$

Con $\xi_T = \xi_A - \xi_B$ e $\eta_T = \eta_A - \eta_B$, quindi seguono le equazioni di vincolo:

$$\begin{cases} 2m-1: & -(\xi_T \cos\varphi_i - \eta_T \mathrm{sen}\varphi_i)(y_C - y_B) + (\xi_T \mathrm{sen}\varphi_i + \eta_T \cos\varphi_i)(x_C - x_B) = 0 \\ 2m\ : & \varphi_i - \varphi_j = \text{costante} \end{cases}$$

Le posizioni all'interno dello jacobiano, relative al nuovo vincolo e ai corpi i-mo e j-mo, dovranno essere riempite dagli elementi della matrice (2) ottenuti derivando le nuove 2m ed 2m-1 rispetto alle coordinate sovrabbondanti precedentemente definite.

	…	q_{3i-2}	q_{3i-1}	q_{3i}	…	q_{3j-2}	q_{3j-1}	q_{3j}	…
2m-1	…	$-(\xi_T \mathrm{sen}\varphi_i + \eta_T \cos\varphi_i)$	$(\xi_T \cos\varphi_i - \eta_T \mathrm{sen}\varphi_i)$	$(x_C - x_i)\,(\xi_T \cos\varphi_i - \eta_T \mathrm{sen}\varphi_i) + (y_C - y_i)\,(\xi_T \mathrm{sen}\varphi_i + \eta_T \cos\varphi_i)$	…	$(\xi_T \mathrm{sen}\varphi_i + \eta_T \cos\varphi_i)$	$-(\xi_T \cos\varphi_i - \eta_T \mathrm{sen}\varphi_i)$	$-(x_C - x_j)(\xi_T \cos\varphi_i - \eta_T \mathrm{sen}\varphi_i) - (y_C - y_j)(\xi_T \mathrm{sen}\varphi_i + \eta_T \cos\varphi_i)$	…
2m	…	0	0	1	…	0	0	−1	…

(2)

Bisogna notare che le espressioni: $(y_C - y_B)$, $(x_C - x_B)$, x_C e y_C scritte per semplicità utilizzando le coordinate assolute, devono essere riportate anch'esse nelle coordinate locali usando la matrice di rotazione. Quindi si scrivono le componenti dei punti B e C in coordinate locali :

$$\begin{Bmatrix} x_B \\ Y_B \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\varphi_i & -sin\varphi_i & x_i \\ sin\varphi_i & cos\varphi_i & y_i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_B \\ \eta_B \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x_C \\ Y_C \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\varphi_j & -sin\varphi_j & x_j \\ sin\varphi_j & cos\varphi_j & y_j \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_C \\ \eta_C \\ 1 \end{Bmatrix}$$

e facendo la differenza tra le ascisse e le ordinate si ottengono le espressioni:

$$\begin{aligned} (x_C - x_B) = &\ (\xi_C \cos\varphi_j - \eta_C \mathrm{sen}\varphi_j + x_j) - (\xi_B \cos\varphi_i - \eta_B \mathrm{sen}\varphi_i \\ &+ x_i) \\ (y_C - y_B) = &\ (\xi_C \mathrm{sen}\varphi_j + \eta_C \cos\varphi_j + y_j) - (\xi_B \mathrm{sen}\varphi_i + \eta_B \cos\varphi_i \\ &+ y_i) \end{aligned}$$

Globalmente la matrice jacobiano sarà formata da 3n colonne (n il numero dei corpi che costituiscono la catena cinematica considerata), con etichetta: $q_1 \quad q_2 \quad q_3 \ldots$ $q_{3i-2}\ q_{3i-1}\ q_{3i} \ldots\ q_{3n-2}\ q_{3n-1}\ q_{3n}$ e da 2k colonne(k il numero di vincoli), con etichetta: 1 1+1…2m-1 2m…2k-1 2k. Ogni elemento della matrice si ottiene inserendo opportunamente gli elementi di (1) e (2) tenendo conto del tipo di vincolo, dei corpi che definiscono la coppia cinematica(i e j) e della coordinata lagrangiana corrispondente.

Vediamo ora la compilazione del vettore $\{\gamma\}$ (una colonna e 2k righe) che analiticamente si ottiene dalla derivazione seconda delle equazioni di vincolo ($\{\ (q)\} = 0$) rispetto al tempo. Nel caso in cui i vincoli siano indipendenti dal tempo (gli elementi di $\{q\}$ invece dipenderanno in generale da quest'ultimo) si ha:

$$\{\gamma\} = -\left([\ \ _q]\{\dot{q}\}\right)_q \{\dot{q}\}$$

Supponendo che il vincolo m-mo sia una coppia rotoidale, con la stessa nomenclatura usata precedentemente si avrà:

$$\begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{c} 2m\text{-}1 \\ 2m \end{array}} \end{array} \quad \begin{bmatrix} (\xi_i \cos\varphi_i - \eta_i \,\mathrm{sen}\,\varphi_i)\dot{\varphi}_i^2 - (\xi_j \cos\varphi_j + \eta_j \,\mathrm{sen}\,\varphi_j)\dot{\varphi}_j^2 \\ (\xi_i \,\mathrm{sen}\varphi_i + \eta_i \cos\varphi_i)\dot{\varphi}_i^2 - (\xi_j \,\mathrm{sen}\varphi_j + \eta_j \cos\varphi_j)\dot{\varphi}_j^2 \end{bmatrix}$$

(3)

Mentre prendendo una coppia prismatica, i due elementi di $\{\gamma\}$ in corrispondenza del vincolo m-mo saranno:

$$\begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{c} 2m\text{-}1 \\ \\ 2m \end{array}} \end{array} \quad \begin{bmatrix} \begin{aligned} -2\big[(-\xi_T \cos\varphi_i + \eta_T \mathrm{sen}\varphi_i)\,(\dot{x}_i - \dot{x}_j) \\ - (\xi_T \mathrm{sen}\varphi_i + \eta_T \cos\varphi_i)(\dot{y}_i - \dot{y}_j)\big]\,\dot{\varphi}_i \\ - \big[(-\xi_T \cos\varphi_i + \eta_T \mathrm{sen}\varphi_i)(y_i - y_j) \\ - (\xi_T \mathrm{sen}\varphi_i + \eta_T \cos\varphi_i)(x_i - x_j)\big]\dot{\varphi}_i^2 \end{aligned} \\ \\ 0 \end{bmatrix}$$

(4)

Di seguito vengono riportati i precedenti 4 sistemi scrivendone gli elementi nelle coordinate assolute:

$$
\begin{array}{c|l}
 & \begin{matrix} \cdots & q_{3i-2} & q_{3i-1} & q_{3i} & \cdots & q_{3j-2} & q_{3j-1} & q_{3j} & \cdots \end{matrix} \\
\begin{matrix} 2m-1 \\ 2m \end{matrix} & \begin{bmatrix} \cdots & 1 & 0 & Y_i - Y_P & \cdots & -1 & 0 & -(Y_i - Y_P) & \cdots \\ \cdots & 0 & 1 & -(X_i - X_P) & \cdots & 0 & -1 & X_i - X_P & \cdots \end{bmatrix}
\end{array}
$$

(1)

$$
\begin{array}{c|ccccccccc}
 & \cdots & q_{3i-2} & q_{3i-1} & q_{3i} & \cdots & q_{3j-2} & q_{3j-1} & q_{3j} & \cdots \\
2m-1 & \cdots & (Y_B - Y_A) & -(X_B - X_A) & \begin{matrix} -(x_C - x_i)(X_B - X_A) \\ -(y_C - y_i)(Y_B - Y_A) \end{matrix} & \cdots & -(Y_B - Y_A) & (X_B - X_A) & \begin{matrix} (x_C - x_j)(X_B - X_A) \\ +(y_C - y_j)(Y_B - Y_A) \end{matrix} & \cdots \\
\hdashline
2m & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & -1 & \cdots
\end{array}
$$

(2)

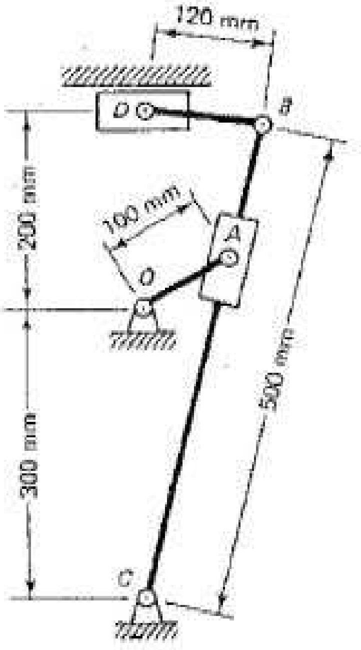
$$
\begin{array}{c}
2m-1 \\ 2m
\end{array}
\begin{bmatrix}
(X_A - X_i)\dot{\varphi}_i^2 - (X_A - X_j)\dot{\varphi}_j^2 \\
(Y_A - Y_i)\dot{\varphi}_i^2 - (Y_A - Y_j)\dot{\varphi}_j^2
\end{bmatrix}
$$

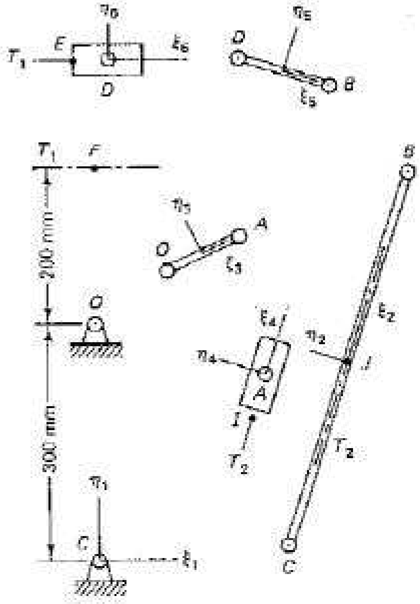
(3)

$$
\begin{array}{c}
2m-1 \\ \\ 2m
\end{array}
\begin{bmatrix}
-2\left[(X_B - X_A)(\dot{x}_i - \dot{x}_j) - (Y_B - Y_A)(\dot{y}_i - \dot{y}_j)\right]\dot{\varphi}_i \\
-\left[(X_B - X_A)(y_i - y_j) - (Y_B - Y_A)(x_i - x_j)\right]\dot{\varphi}_i^2 \\
0
\end{bmatrix}
$$

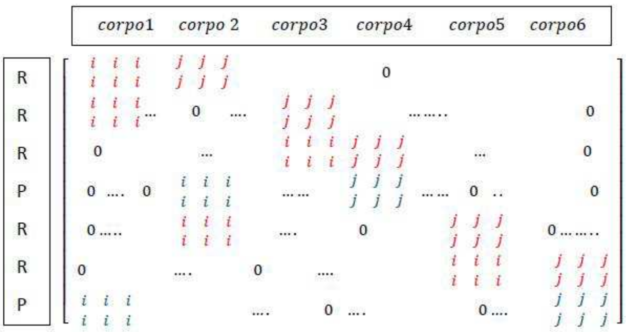
(4)

ESEMPIO: Guida di Fairbairn



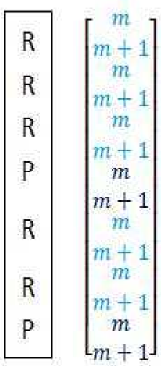


La guida di Fairbairn ,rappresentata in figura, è un meccanismo costituito da 6 corpi (distinguibili e numerati nella vista esplosa) e 7 vincoli: 5 cerniere e 2 guide prismatiche. In questo caso lo jacobiano sarà costituito da 14 righe e 18 colonne e $\{\gamma\}$ da 14 righe(e ovviamente 1 colonna).
A partire dalle quote segnate in figura, dato l'angolo del corpo 3 pari a $30^{\circ}(\varphi_3 = 30^{\circ})$ e data $\dot{\varphi}_3$,è possibile ricavare gli angoli di tutti i corpi mediante una costruzione grafica e le velocità per esempio tramite il metodo dei diagrammi polari. Assegnate le coordinate dei punti I,J che definiscono la direzione di traslazione T2 e quelle di F ed E che definiscono la direzione di traslazione T1,si dispone di tutti i dati necessari per poter compilare $[\psi_q]$e $\{\gamma\}$ che risulteranno essere come in figura.



R = Coppia rotoidale ---- blocco (1)

P = Coppia prismatica ---- blocco (2)



---- elementi (3)

---- elementi (4)

Dati per la risoluzione numerica tramite il programma in Matlab realizzato:

$$\{q\} =$$
$$[0 \quad 0 \quad 0\ ,\ 60.048 \quad 242.68 \quad 1.328,\ 43.3 \quad 325 \quad 0.52\ ,\ 36.6 \quad 350 \quad 1.328\ ,\ 60.045 \quad 492.7 \quad 3.02\ ,\ 0 \quad 492.7 \quad 0]$$

$$\{\dot{\varphi}\}=$$
$$[0 \quad 0.603 \quad 3.14 \quad 0.603 \quad 0.607 \quad 0]$$

Coppia rotoidale:

parametri da inserire per blocchi di tipo (1) e (3)

$\xi_1^C = 0$	$\eta_1^C = 0$	$\xi_2^C = -250$	$\eta_2^C = 0$
$\xi_1^O = 0$	$\eta_1^O = 300$	$\xi_3^O = -50$	$\eta_3^O = 0$
$\xi_3^A = 50$	$\eta_3^A = 0$	$\xi_4^A = 0$	$\eta_4^A = 0$
$\xi_2^B = 250$	$\eta_2^B = 0$	$\xi_5^B = 60$	$\eta_5^B = 0$
$\xi_5^D = -60$	$\eta_5^D = 0$	$\xi_6^D = 0$	$\eta_6^D = 0$

Coppia prismatica:

parametri da inserire per blocchi di tipo (2) e (4) dove i punti J, A, e I definiscono l'asse di traslazione T_2 e D, E ed F l'asse di traslazione T_1

J	A	I
$\dot{x}_1 = -36.2089$ $\dot{y}_1 = 146.336$	$\dot{x}_j = -157$ $\dot{y}_j = 271.93$	$\xi_I = 100$ $\eta_I = 0$
F	**D**	**E**
$\xi_F = 10$ $\eta_F = 500$	$\dot{x}_j = -301.5$ $\dot{y}_j = 0$	$\xi_E = -10$ $\eta_E = 500$

Si noti che i punti J, A e D coincidono con i baricentri dei corpi 2,4 e 6 per cui le loro coordinate locali saranno nulle mentre le componenti delle velocità di F sono nulle in quanto è un punto solidale al telaio.

2. Conclusioni

Il programma realizzato in Matlab consente di ricavare in modo del tutto automatico la matrice jacobiana e il vettore gamma conoscendo, in un certo istante, i parametri visti nel precedente paragrafo. Tramite il sistema della dinamica si ricava,con un opportuno programma di elaborazione, il vettore $\{\ddot{q}\}$ che, tramite integrazione numerica, è in grado di fornire il vettore $\{q\}$ ad un istante successivo. Si ricava così in modo automatico la nuova matrice jacobiana e il nuovo $\{\gamma\}$. Si procede in modo iterativo per l' intervallo di tempo voluto per ricavare posizioni, velocità e accelerazioni dei membri del meccanismo in tale intervallo.

3. Bibliografia

[1] Nikravesh, P.E.,1988, *Computer-Aided Analysis of Mechanical Systems*