

Introduzione alle tecniche dell'analisi sperimentale

La caratterizzazione di un flusso avviene, nel caso di flusso incomprimibile ($\rho = \text{cost}$) attraverso la determinazione della pressione e delle tre componenti del vettore velocità.

- **Misura della pressione**

Cominciamo dalle tecniche di misura della pressione, poichè esse consentono di misurare (indirettamente) anche la velocità.

Per determinare il valore della pressione in un punto P del campo fluidodinamico, si ricorre normalmente ad un tubo di piccolo ingombro allineato con la corrente, lambito cioè dal fluido (fig. 1).



Figura 1:

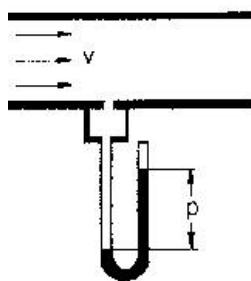


Figura 2:

La pressione misurata in P attraverso un foro radiale praticato nel tubicino è pari proprio alla pressione che si misurerebbe in un punto sulla verticale (Q) nella corrente uniforme e indisturbata, fuori dallo strato limite che si forma intorno al tubicino. Il foro radiale viene collegato ad un ramo di un tubo a U, e il dislivello h nei due rami del tubo è legato alla differenza di pressione nel punto P e nell'ambiente collegato all'altro ramo del manometro. Quest'ultima è generalmente nota e pari, normalmente, alla pressione atmosferica.

Quando interessa registrare delle pressioni rapidamente variabili nel tempo, come nel caso dei flussi turbolenti, è possibile sostituire il tubicino con un microfono, disposto anch'esso parallelamente alla corrente.

Se il fluido scorre lungo una parete, il valore della pressione in ogni punto della parete stessa si misura facilmente tramite una serie di fori, ognuno dei quali è collegato ad un manometro come nel caso precedente (fig. 2). In questo modo è possibile, ad esempio, controllare l'andamento del gradiente di pressione lungo un'ala (o una lastra piana), oppure, nel caso di un'ala, calcolarne approssimativamente la portanza misurando la differenza di pressione lungo la corda tra il ventre ed il dorso (fig. 3, 4).

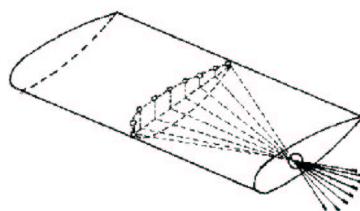


Figura 3:

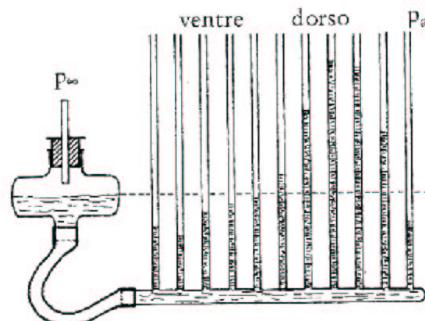


Figura 4:

Nei due esempi precedenti il foro per la misura della pressione ("termodinamica" o "statistica") è allineato *precisamente* nella direzione della corrente. Il foro si può invece realizzare in corrispondenza della "testa" del tubicino (fig. 5), cioè in corrispondenza del punto di ristagno del flusso. In questo punto la velocità è nulla mentre la pressione raggiunge il valore p_R pari a: $p_R = p_\infty + (1/2)\rho U_\infty^2$. Se il foro viene collegato con un ramo del tubo ad U , la differenza di livello nel manometro permette di risalire alla differenza fra la cosiddetta "pressione dinamica" p_R e la pressione di riferimento dell'altro ramo del tubo.

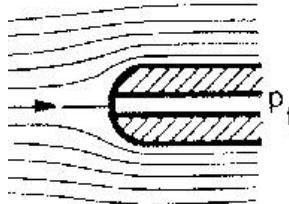


Figura 5:

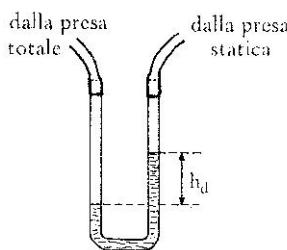


Figura 6:

- Misure di velocità

- Tubo di Pitot

Combinando le due configurazioni precedenti si ottiene il cosiddetto *Tubo di Pitot* (fig. 7), che permette di determinare il valore (di una o piu' componenti) della velocità in un determinato punto del campo. Come si vede dalla figura, il tubo di Pitot e' costituito sostanzialmente da due tubicini coassiali: quello interno è dotato di un'apertura che misura la pressione di ristagno, mentre quello esterno è provvisto di uno o piu' fori radiali, che permettono di misurare la pressione p_∞ . In effetti i fori praticati sul manetto esterno sono posizionati sufficientemente lontano dal "becco" dello strumento, in modo tale che le condizioni del fluido siano tornate identiche a quelle a monte del Pitot: la velocità torna al suo valore "indisturbato" U_∞ e la pressione pressione pari a p_∞). La differenza di pressione fra presa "statica" e presa "dinamica" e' pari a $1/2\rho U_\infty^2$, e il dislivello fra i rami del manometro manometrico ΔH_m permette di risalire alla velocità del flusso indisturbato (fig. 6):

$$\rho_m g \Delta H_m = (1/2) \rho_{fluido} U_\infty^2. \quad (1)$$

Questa semplice configurazione permette quindi di misurare la velocità di flussi monodimensionali, mentre versioni piu' sofisticate di questo strumento -tubi di Pitot a 5 fori- permettono di misurare tutte e tre le componenti della velocità.

La fig. 8 rappresenta la relazione tra l'ingresso e l'uscita di un tubo di Pitot, cioè tra velocità da misurare e differenza di pressione registrata dallo strumento. Come si vede, il maggiore difetto dello strumento è rappresentato dalla sua scarsa sensibilità alle

basse velocità, dove la curva di calibrazione è molto "piatta": in questo range, dunque, è necessario che la velocità cambi considerevolmente per produrre una variazione di pressione differenziale che possa essere apprezzata dallo strumento. Gli altri difetti del tubo di Pitot sono:

- * la sua limitata "risposta in frequenza" (incapacità di seguire rapide fluttuazioni del segnale di velocità, dovuta all'inerzia della massa d'aria contenuta all'interno dello strumento)
- * il suo ingombro, che lo rende inadatto per quei casi in cui la velocità varia rapidamente da punto a punto nello spazio.

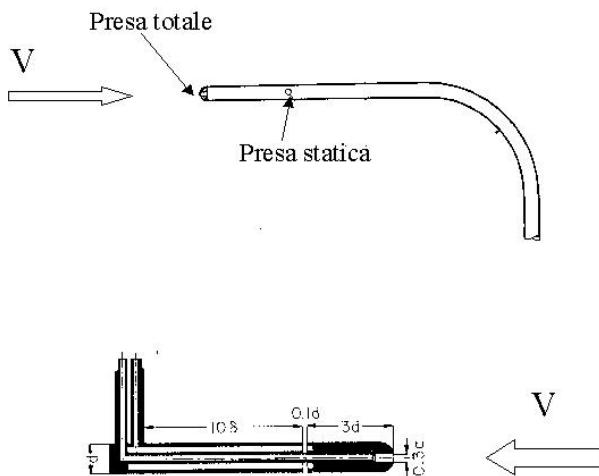


Figura 7:

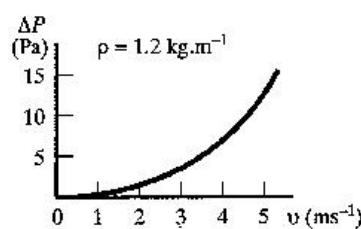


Figura 8:

Trasduttori di pressione differenziale

Quasi sempre l'output di uno strumento di misura (nel nostro caso il tubo di Pitot) deve essere convertito in un segnale elettrico (una differenza di potenziale, una corrente...) per poter essere acquisito da un computer e successivamente analizzato.

Normalmente dunque, la differenza di pressione registrata dal tubo di Pitot non viene letta direttamente sulla canna barometrica, ma viene convertita in una tensione

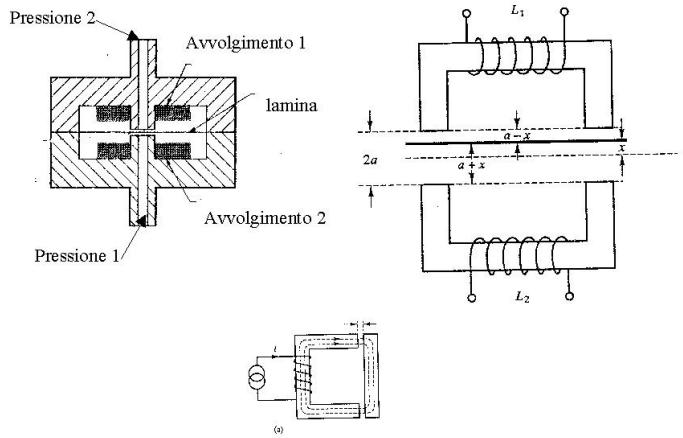


Figura 9: Per il semplice circuito ferromagnetico in basso della figura, la forza magnetomotrice ni deve uguagliare il prodotto $\mathcal{R}i$, dove \mathcal{R} è la riluttanza complessiva del circuito: $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\text{magnete}} + \mathcal{R}_{\text{traferro}} = \mathcal{R}_{\text{magn}} + t/(\mu_0 S)$ Quindi l'induttanza del circuito sarà data da $L = n\Phi/i = n^2/\mathcal{R} = L_0/(1 + \alpha t)$, dove L_0 e α sono costanti e t è l'ampiezza del traferro. Lo stesso ragionamento puo' estendersi al circuito più complesso: l'induttanza L_1 della parte superiore si può esprimere come $L_1 = L_0/(1 + \alpha(a - x))$, mentre l'induttanza L_2 della parte inferiore si può esprimere come $L_2 = L_0/(1 + \alpha(a + x))$.

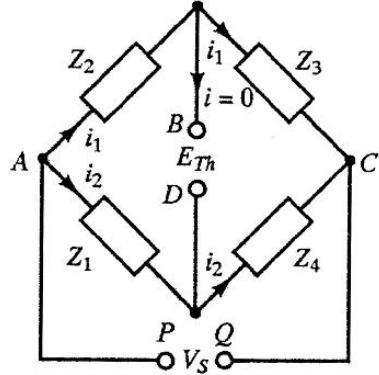


Figura 10: Il ponte è equilibrato quando la differenza di potenziale V fra i punti B e D è nulla, e analogamente la corrente i fra i due punti: $V = 0, i = 0$. Questa condizione si verifica (semplice applicazione del teorema di Thévenin) quando le quattro impedanze soddisfano la seguente relazione: $\frac{Z_4}{Z_1} = \frac{Z_3}{Z_2}$ Quando una delle 4 impedanze (per es. Z_1) varia rispetto al valore per cui il ponte è equilibrato, la differenza di potenziale fra i punti B e D (squilibrio del ponte) non è più nulla, e si avrà che: $\frac{\Delta V}{V} = f(\frac{\Delta Z_1}{Z_1})$ Normalmente la legge di variazione di V con Z_1 non è lineare (lo è soltanto localmente, per piccole variazioni di Z_1). Tuttavia, nel particolare caso del trasduttore di pressione a induttanza variabile mostrato in figura (assumendo cioè che $Z_1 = L_1$ e che $Z_2 = L_2$, si può dimostrare che la variazione di tensione ΔV è proporzionale allo spostamento del diaframma x , cioè che $\Delta V = kx = k'\Delta p$ per piccole deflessioni del diaframma .

tramite i cosiddetti trasduttori di pressione differenziale. Questi trasduttori sono costituiti sostanzialmente da uno o piu' elementi di un circuito elettrico (una resistenza, un'induttanza o una capacità) i cui valori dipendono, in qualche modo, dalla differenza di pressione che vogliamo misurare. Ad esempio, nel caso di una capacità (il cui valore è dato da $C = kS/x$), la distanza x fra le armature puo' variare in funzione della differenza di pressione agente su di esse. I trasduttori di pressione comunemente usati sono del tipo a induttanza variabile, raffigurato in fig. 9. La variazione di impedenza di questi trasduttori viene misurata inserendo il trasduttore stesso in uno dei rami di un ponte di Wheatstone (fig. 10), che permette di convertire le (piccole) variazioni di impedenza in una tensione ad essa proporzionale.

Per poter essere acquisita da un computer, la tensione in uscita dal ponte di Wheatstone (rappresentata da un segnale continuo nel tempo, $y(t)$) deve essere prima convertita in un segnale discreto, cioè in un insieme di campioni $\{y_i, i = 1, \dots, N\}$ campionati ad intervalli regolari di tempo $\{t_i = i * \Delta t, i = 1, \dots, N\}$. L'intervallo di tempo Δt trascorso tra l'acquisizione di un campione ed il successivo rappresenta l'inverso della cosiddetta frequenza di campionamento f_s . Chiaramente, questa frequenza di campionamento deve essere scelta "sufficientemente grande" (rispetto alla frequenza massima del segnale) per evitare che il campionamento del segnale provochi una perdita di informazione. La fig. 11 illustra la condizione che permette di rappresentare un segnale continuo con un insieme discreto di campioni: la frequenza di campionamento deve essere almeno 2 volte la frequenza massima del segnale (teorema di Nyquist). Quando questa condizione è rispettata, il segnale puo' essere successivamente ricostituito a partire dai valori campionati. In caso contrario (fig. 12, dove il

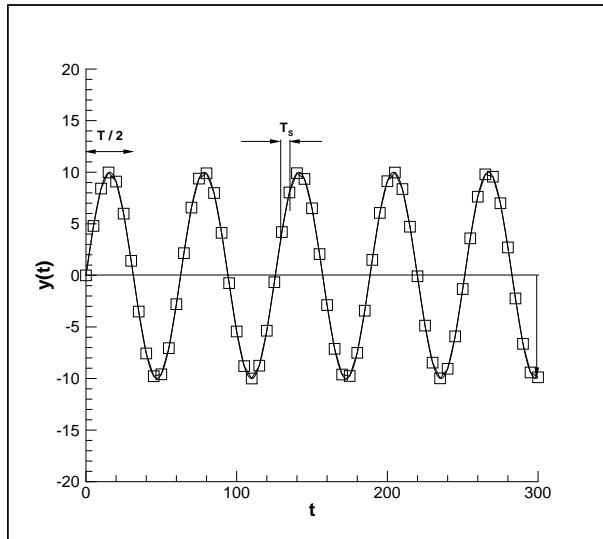


Figura 11:

segnale è campionato con una frequenza troppo bassa) la sinusoide di partenza viene riconosciuta come un segnale a frequenza piu' piccola (*aliasing*). L'operazione di campionamento (e la successiva codifica dei campioni acquisiti $\{y_i\}$ in formato binario,

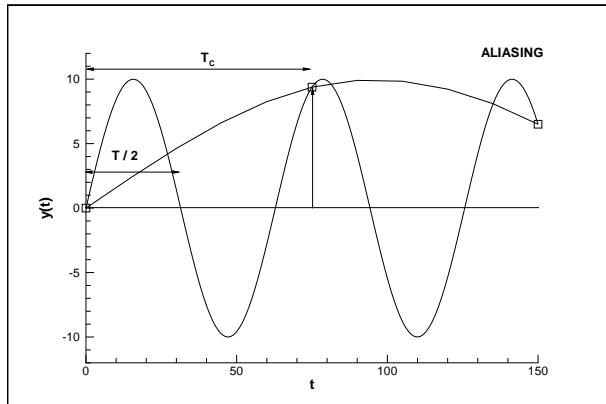


Figura 12:

cioè in una successione di 0 e 1 che approssimano il valore acquisito) viene effettuato dal convertitore analogico/digitale (vedi la fig. 13 dove è raffigurato una semplice catena di misura per la misura della velocità con un tubo di Pitot).

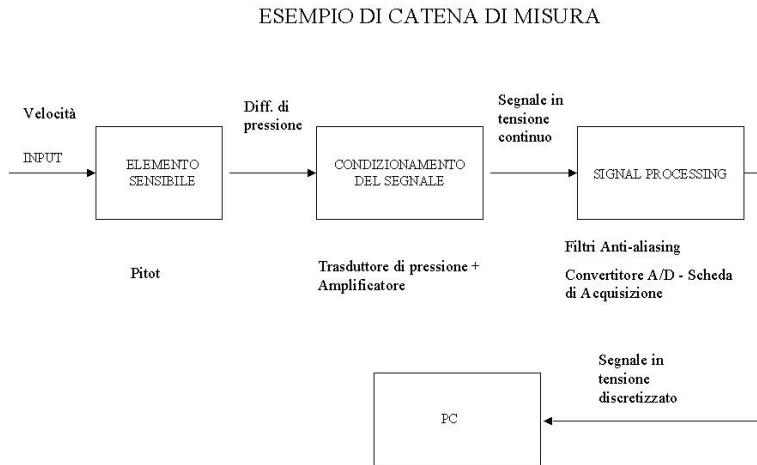


Figura 13:

– Anemometria a Filo Caldo

Nei casi in cui la velocità da misurare varia rapidamente nel tempo, o in cui il volume di misura debba avere dimensioni molto ridotte, il tubo di Pitot puo' rivelarsi inadatto, e si utilizzano altre tecniche. Tra queste una delle piu' diffuse, specie nel campo della turbolenza, è la cosiddetta *"anemometria a filo caldo"*.

Il principio di funzionamento è il seguente: un filo estremamente piccolo e sottile di Tungsteno (la lunghezza non supera normalmente il millimetro, e il diametro è inferiore a 5 micron), teso tra due supporti ("rebbi"), viene investito da una corrente d'aria normale al filo stesso, con una velocità incognita (fig. 14, 15).

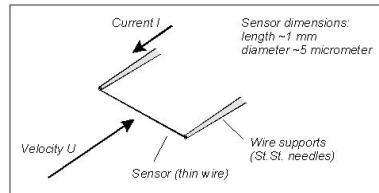


Figura 14:

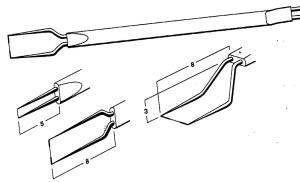


Figura 15:

Poichè nel filo, di resistenza R_w , circola una corrente i_w , esso si trova ad una temperatura molto più alta del fluido circostante (normalmente $250^{\circ}C$ se il fluido è aria a temperatura ambiente). In condizioni di equilibrio termico la stessa quantità di calore $R_w i_w^2$ prodotta per effetto Joule nell'unità di tempo deve essere asportata dal filo, principalmente per convezione forzata ad opera del fluido circostante, ma anche per irraggiamento e per conduzione attraverso i rebbi.

Se la velocità del fluido aumenta rispetto alle condizioni iniziali di equilibrio, lo scambio convettivo aumenta anch'esso, e la temperatura del filo diminuisce fino al suo nuovo valore di equilibrio.

L'equazione che governa il fenomeno è quindi la seguente:

$$dE_w/dt = W - H \quad (2)$$

dove E_w è l'energia termica immagazzinata nel filo ($E_w = m_w c_w T_w$, con m_w e c_w rispettivamente massa e capacità termica del filo), W è la potenza generata per effetto Joule ($W = R_w i_w^2$), e H è la potenza scambiata fra filo caldo e esterno. H rappresenta dunque la somma di tre termini:

- * H_1 = calore scambiato per convezione con il fluido
- * H_2 = calore scambiato per conduzione attraverso i rebbi
- * H_3 = calore scambiato per irraggiamento

Partendo dall'equazione di bilancio termico è possibile risalire alla velocità del fluido misurando la differenza di tensione ai capi della sonda stessa, ammesso che la velocità sia l'unica variabile che influenzi lo scambio termico convettivo (le condizioni termodinamiche del fluido non devono cioè cambiare nel corso della misura).

Vediamo come si procede.

Normalmente, per la misura della velocità, il filo caldo viene utilizzato nella modalità a "Temperatura Costante", la temperatura del filo è cioè mantenuta sempre allo stesso valore mediante un opportuno sistema di controllazione. In pratica, se la velocità del fluido aumenta rispetto al valore iniziale (e la temperatura del filo tenderebbe dunque a diminuire per effetto del maggiore scambio termico fra filo e aria) il sistema di controllazione provvede a far circolare una corrente maggiore all'interno del filo, in modo da riaumentarne immediatamente la temperatura fino al valore di partenza. In questa situazione, la temperatura del filo, quindi anche la sua resistenza $R_w = R_{w,0}(1 + \alpha\Delta T)$ rimane sempre la stessa, mentre la quantità di corrente I_w che circola nel filo cambia in funzione della velocità che investe la sonda. Cambia dunque la tensione $E_w = R_w I_w$ ai capi della sonda.¹

In condizioni di temperatura del filo costante, l'equazione di bilancio diventa:

$$W = H, \quad (3)$$

essendo $dT/dt = 0$. Trascurando il calore scambiato per irraggiamento, e nell'ipotesi che il calore scambiato per conduzione sia trascurabile rispetto a quello scambiato per convezione (ipotesi valida per rapporti l/d fra lunghezza e diametro del filo sufficientemente alti), è possibile semplificare ulteriormente l'equazione, che diventa $W = H_1$, cioè:

$$I^2 R_w = h \cdot A \cdot (T_w - T_f), \quad (4)$$

ovvero

$$I^2 R_w = Nu \cdot k_f \cdot A \cdot (T_w - T_f) \quad (5)$$

con h = coefficiente di scambio termico convettivo

A = superficie di scambio termico = $2\pi d/2l$

d, l = diametro e lunghezza del filo

k_f = conducibilità termica del fluido

Nu = numero di Nusselt = h/k_f

$(T_w - T_f)$ = differenza di temperatura tra filo e fluido, fissata dal sistema di misura.

In regime di convezione forzata, ($Re > Gr^{1/3}$) è possibile esprimere il numero di Nusselt in funzione del numero di Reynolds:

$$Nu = A_1 + B_1 \cdot Re^n = A_2 + B_2 \cdot U^n, \text{ con } n \simeq 0.5 \quad (6)$$

¹si puo' anche utilizzare il filo caldo anche nella modalità a "corrente costante", ma in questo caso, a causa dell'inerzia termica della sonda, le fluttuazioni di velocità ad alta frequenza possono essere "smorzate"

Dunque l'equazione di bilancio diventa:

$$I^2 R_w^2 = (T_w - T_f)(A + B \cdot U^n) = a + b \cdot U^n \quad (7)$$

nota come "Legge di King". Essa permette di utilizzare la caduta di tensione $E_w = R_w I_w$ ai capi della sonda a filo caldo come misura della velocità, una volta che siano note le due costanti a e b che intervengono nella relazione (7) (cioè che la sonda sia stata "calibrata"). Chiaramente questi valori dipendono sia dalla caratteristiche geometriche della sonda (lunghezza, diametro, posizione relativa della sonda rispetto al flusso) che dalle condizioni del fluido (viscosità, temperatura), da determinare di volta in volta. Prima di utilizzare una sonda a filo caldo si procede dunque alla sua calibrazione, cioè alla determinazione dei parametri che intervengono nella relazione (7). Per far ciò, si misura semplicemente la risposta dello strumento (cioè la tensione E_w ai capi della sonda) in corrispondenza di p velocità note ($p \geq 2$), U_1, U_2, \dots, U_p .

Praticamente, la calibrazione avviene nella sezione di prova della galleria (dove la velocità del flusso è uniforme e può essere variata a piacimento) avvicinando alla sonda a filo caldo un tubo di Pitot. La velocità del flusso che investe la sonda a filo caldo può essere determinata tramite il tubo di Pitot, e contemporaneamente viene registrata la tensione E_w ai capi della sonda a filo caldo. Si ha così una prima coppia di punti (U_1, E_1) della relazione 7. Variando successivamente la velocità all'interno della sezione di prova è possibile, con la stessa procedura, ottenere altre coppie di punti (U_i, E_i) , e quindi determinare, con un'interpolazione ai minimi quadrati dei punti ottenuti, i valori dei parametri che intervengono nella relazione 7. La sonda è a questo punto calibrata (misurando la tensione ai capi della sonda è possibile cioè risalire alla velocità del flusso che investe la sonda stessa) e può essere utilizzata in tutte quelle situazioni dove l'utilizzo di un tubo di Pitot non è possibile (ad es. per misure all'interno di uno strato limite intorno ad un'ala, dove il Pitot sarebbe troppo "intrusivo", o nel caso di flussi turbolenti, caratterizzati quindi da rapide fluttuazioni nel tempo che il Pitot non sarebbe in grado di registrare).

Per misurare praticamente la tensione E_w ai capi della sonda a filo caldo si ricorre, come al solito, ad un ponte di Wheatstone (fig. 16), che permette di mantenere costante la resistenza del filo caldo, e quindi la sua temperatura. Il ponte viene infatti bilanciato inizialmente con la sonda a filo caldo inserita in uno dei suoi rami. Un eventuale squilibrio del ponte è dovuto al fatto che la temperatura, quindi la resistenza della sonda a filo caldo cambia per effetto di una variazione di velocità. Questo squilibrio, opportunamente amplificato, comanda un generatore di corrente, che modifica l'intensità di corrente che circola nel ponte in modo da riportare il valore della temperatura della sonda a quello iniziale, annullando così lo squilibrio stesso. La tensione ai capi della sonda E_w viene acquisita dal computer e successivamente convertita in velocità tramite la curva di calibrazione.

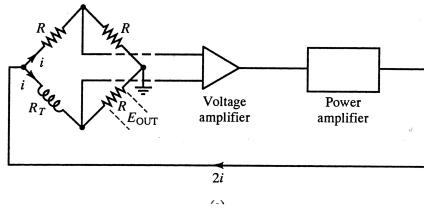


Figura 16:

- Laser Doppler

Un'altra tecnica comunemente usata per la misura di (una o piu') componenti della velocità di flussi è l'anemometria Laser Doppler (LDA). Essa risulta particolarmente utile in quei casi in cui sono si rivela necessario l'uso di sonde non intrusive per minimizzare i disturbi, o in cui non e' proprio possibile introdurre sonde all'interno del campo fluidodinamico (ad esempio, nel caso di flussi reagenti: combustori, motori a scoppio).

Il funzionamento del LDA si basa sul rilevamento della luce diffusa da particelle inseminanti che attraversano una zona - il punto di misura- caratterizzata dalla presenza di frange d'interferenza prodotte dall'incrocio di due raggi laser (vedi fig. 17, 18, 19)

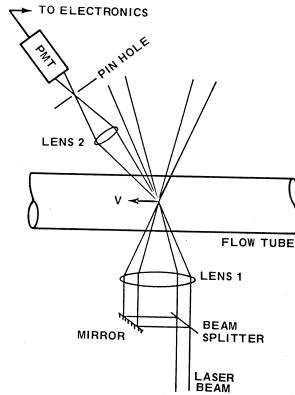


Figura 17:

La sorgente laser genera infatti un raggio monocromatico (composto cioè da treni d'onda caratterizzati da un'unica e ben determinata frequenza), che viene successivamente suddiviso in due. I due raggi vengono focalizzati mediante un sistema di lenti nel volume di misura (un ellissoide di $1mm^3$ circa). In questa zona, l'interferenza dei due raggi per effetto della differenza di cammino ottico percorso, produce un'alternanza di strisce buie e strisce piu' luminose (vedi fig. 19, 21) Quando una particella inseminante transita in questa zona di frange d'interferenza, attraversa in sequenza zone "luminose" e meno luminose ("buie"). La luce "diffusa" dalla particella ha dunque un andamento alternato: la sua intensità varia cioè con una certa frequenza f pari $1/T$, dove T e' il tempo impiegato dalla particella per passare da una frangia luminosa alla

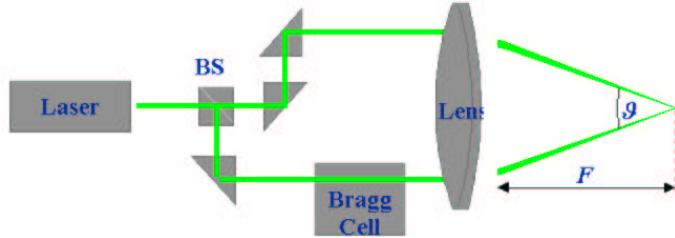


Figura 18:

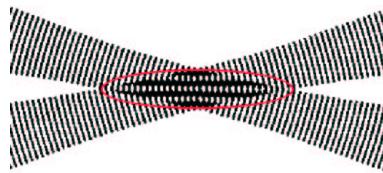


Figura 19:

successiva. In definitiva:

$$T = \Delta/U, \quad (8)$$

con Δ = spaziatura fra le frange e U = componente della velocità da misurare normale al sistema di frange.

E' chiaro quindi che la componente U (normale alle frange) puo' essere determinata conoscendo:

- * la spaziatura fra le frange
- * l'intervallo di tempo T .

L'intervallo di tempo T si determina facilmente registrando il segnale luminoso diffuso dalle particelle che attraversano il volume di misura. Per far cio' si utilizza un fotomoltiplicatore, cioe' un sensore che produce in uscita una tensione proporzionale all'intensità della luce che lo colpisce.

Una volta registrato questo segnale, il tempo T puo' essere facilmente misurato (ad es. con un'analisi in frequenza che ne evidenzi la componente fondamentale $1/T$). Per quanto riguarda la distanza Δ , e' facile dimostrare che essa è una caratteristica del sistema di misura, dipende cioè solamente dalla frequenza del laser e dall'angolo di incidenza fra i due raggi: $\Delta = \frac{\lambda}{2 \sin \theta}^2$

La velocità delle particelle che attraversano il punto di misura (pari alla velocità del fluido nello stesso punto, per ipotesi) e' dunque dato da:

$$U = \Delta/T = \lambda/2T \cdot \sin \theta \quad (9)$$

²Per il calcolo della spaziatura fra le frange, fare riferimento alla fig. 20 e ai calcoli alla fine del paragrafo

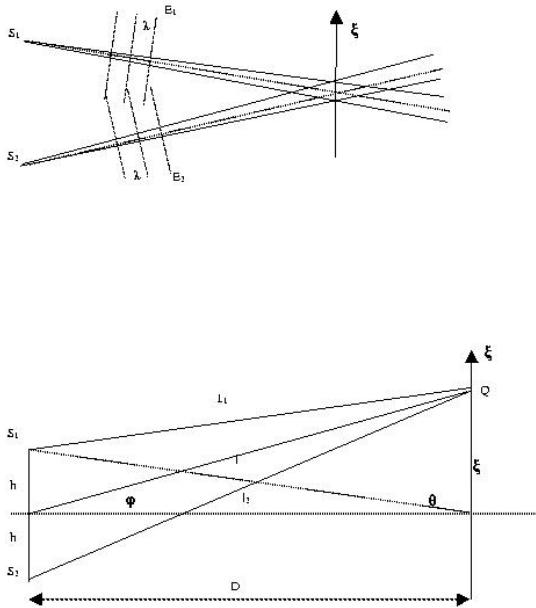


Figura 20:

La relazione fra velocità del flusso e frequenza del segnale rilevato è lineare e dipende solo dalle caratteristiche dell'apparato sperimentale. Il sistema è quindi da questo punto di vista molto stabile e non ha bisogno di taratura.

Notiamo che

- * il segnale luminoso diffuso dalla particella è modulato da una curva gaussiana, (fig. 21). Questo è dovuto al fatto che l'intensità luminosa del raggio laser non è uniforme (su una sezione trasversale), ma decresce muovendosi dal centro del raggio verso l'esterno (fig. 22). Per questo motivo le frange centrali risultano più luminose di quelle laterali.
- * Con il sistema appena illustrato, delle particelle che si muovono con la stessa velocità, ma in direzioni opposte, producono dei segnali (rilevati dal fotomoltiplicatore) identici (fig. 23). Per ovviare a quest'ambiguità direzionale, uno dei due raggi laser, prima di essere focalizzato nel punto di misura, passa attraverso la cosiddetta "cella di Bragg", che ne modifica leggermente la frequenza. In questo modo, il sistema di frange non è più fisso nello spazio, ma "scorre" con una velocità legata allo shift in frequenza fra i due raggi. La velocità assoluta delle particelle si ottiene semplicemente aggiungendo alla velocità relativa (misurata rispetto al sistema di frange) la velocità stessa delle frange.

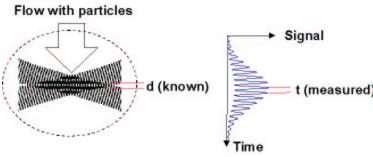


Figura 21:

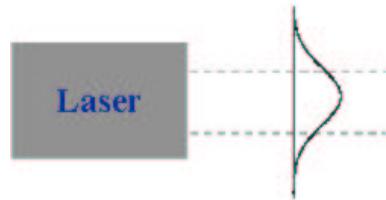


Figura 22:

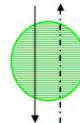


Figura 23:

Calcolo della spaziature delle frange (fig. 20)

S_1 e S_2 sono i punti da cui provengono i due raggi laser, che, data la piccola apertura del cono, possono essere assimilati a due onde elettromagnetiche piane, di numero d'onda $k = 2\pi/\lambda$, con λ = lunghezza d'onda $= cT = c/f$ (f =frequenza del laser). Ognuna delle due onde puo' essere espressa nella forma

$$E = A \sin(kx - \omega t + \delta) \quad (10)$$

o, equivalentemente, nella forma complessa

$$E = A e^{j(kx - \omega t + \delta)}. \quad (11)$$

Vediamo quali condizioni devono essere verificate per avere nel generico punto Q dell'asse ξ , una frangia luminosa (interferenza costruttiva, -le due onde arrivano in fase) o una frangia buia (interferenza distruttiva -le due onde arrivano in opposizione di fase). D rappresenta la distanza tra la lente che focalizza i due raggi nel punto di misura e il punto di misura stesso, gli angoli ϕ e θ sono, vista la geometria del sistema, entrambi molto piccoli, e permettono di semplificare le due distanze S_1Q e S_2Q

$$\phi \ll \rightarrow S_1 Q = l_1 = l - h \sin \phi \quad (12)$$

$$S_2 Q = l_2 = l + h \sin \phi \quad (13)$$

Inoltre abbiamo che:

$$E_1 = A_1 \sin(kx - \omega t + \delta_1) \rightarrow A_1 e^{j(kx - \omega t + \delta_1)} \quad (14)$$

$$E_2 = A_2 \sin(kx - \omega t + \delta_2) \rightarrow A_2 e^{j(kx - \omega t + \delta_2)} \quad (15)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \omega = 2\pi f \quad \lambda = cT = \frac{c}{f} \quad (16)$$

In Q all'istante $t = 0$, e assumendo $\delta_1 = \delta_2 = 0$ abbiamo che:

$$E_1 = A_1 e^{jk(l-h \sin \phi)} \quad (17)$$

$$E_2 = A_2 e^{jk(l+h \sin \phi)} \quad (18)$$

$$E = E_1 + E_2 \quad I = |\vec{E}|^2 = E \cdot E^* = (E_1 + E_2) \cdot (E_1 + E_2)^* \quad (19)$$

L'intensità dell'onda risultante è data da:

$$I = (E_1 + E_2) \cdot (E_1 + E_2)^* = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos \Delta = \quad (20)$$

$$= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(2kh \sin \phi) = \quad (21)$$

$$(22)$$

Essendo $\phi \ll: \sin \phi \simeq \tan \phi = \frac{\xi}{D}$

i punti in cui l'intensità è massima sono quelli caratterizzati da:

$$I = I_{MAX} \Rightarrow \cos \Delta = 1 \quad (23)$$

$$2hk \frac{\xi}{D} = 2n\pi \Rightarrow \xi_n = \frac{n\lambda D}{2h} \quad (24)$$

e quindi la distanza fra una frangia luminosa e la successiva è data dalla distanza Δ_F fra 2 massimi relativi = larghezza frange

$$\Delta_F = \xi_n - \xi_{n-1} = \frac{\lambda D}{2h} \quad (25)$$

essendo $\frac{h}{D} \ll 1$, $\frac{h}{D} = \tan \theta \simeq \sin \theta$ abbiamo che:

$$\Delta_F = \frac{\lambda}{2 \sin \theta} \quad (26)$$

- PIV (Particle Image Velocimetry)

I metodi fin qui esaminati permettono di misurare una o piu' componenti della velocita' in un solo punto del dominio. La determinazione del campo di velocità in una regione estesa richiederebbe la disponibilità di un numero elevato di sonde, ovvero un'unica sonda con opportuni sistemi di movimentazione per spostarla (con ovvie complicazioni costruttive, ripercussioni anche sui tempi degli esperimenti e comunque l'impossibilità di misurare la velocità simultaneamente nei vari punti).

Tipicamente quindi le tecniche finora esaminate sono utilizzate per ottenere statistiche del campo fluidodinamico (valori medi e valori r.m.s per esempio) in pochi punti del dominio.

La Particle Image Velocimetry permette invece la misura simultanea di *due* componenti del vettore velocita' in piu' punti appartenenti allo stesso piano. Più precisamente, le componenti di velocita' che vengono rilevate sono quelle nel piano di misura (fig. 24).

La PIV è dunque particolarmente indicata per i flussi non stazionari, per studiare le caratteristiche del campo di velocita' istantaneo (è utilizzata ad esempio per lo studio delle cosiddette "strutture coerenti" dei flussi turbolenti).

Principio di funzionamento

Il principio di funzionamento è relativamente semplice (vedi fig. 24), anche se la tecnica PIV coinvolge molte discipline (fluidodinamica, ottica, image-processing, analisi del segnale). Esso consiste nel determinare lo spostamento, in un intervallo di tempo noto, di particelle traccianti con cui viene inseminato il fluido. Come nel caso del Laser Doppler, tipo e dimensioni delle particelle sono scelti in modo tale da non alterare le proprietà fisiche del fluido, e le particelle sono sufficientemente piccole da seguire fedelmente le variazioni di velocità del fluido stesso. Con questi presupposti, il moto delle particelle fluide può essere assimilato a quello delle particelle traccianti. I traccianti sono scelti inoltre in modo da poter diffondere la luce che li colpisce, emessa da una sorgente laser (non possono dunque essere *trop*po piccoli, altrimenti non diffonderebbero una quantità di luce sufficiente), e la loro posizione può dunque essere registrata su un opportuno dispositivo (macchina fotografica o telecamera, analogiche o digitali).

Nella PIV, dunque, le posizioni successive occupate dai traccianti vengono registrate almeno due volte, a brevissime distanze temporali (vedi fig. 25). Un software opportuno risale agli spostamenti delle particelle tra i due istanti. Se l'intervallo temporale fra i due "scatti" è sufficientemente piccolo, dunque, il campo di velocità si ottiene direttamente dividendo lo spostamento calcolato per l'intervallo di tempo corrispondente.

Set-up

Un classico set-up PIV comprende quindi:

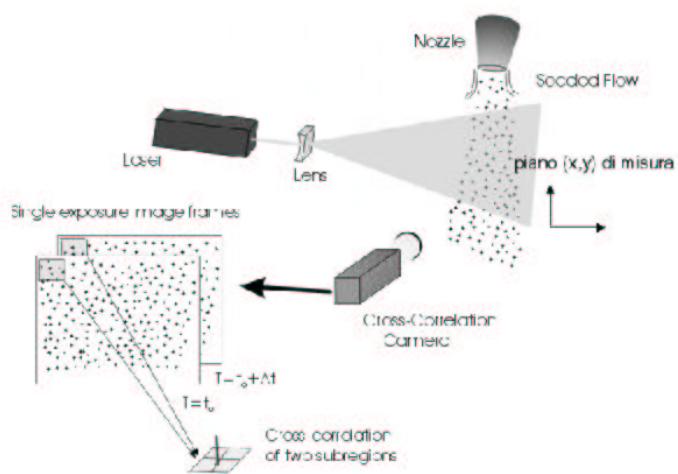


Figura 24:

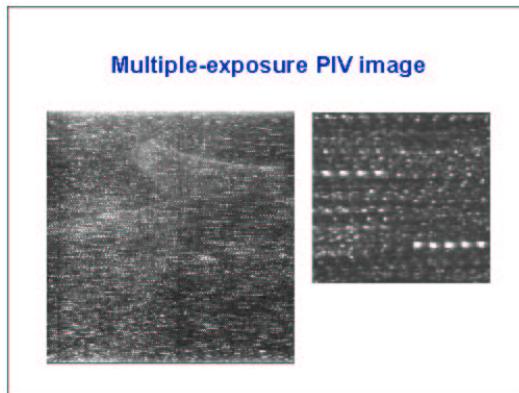


Figura 25:

- 1) un dispositivo di inseminazione del fluido
- 2) una sorgente di luce che (tipicamente un laser pulsato, in grado cioè di emettere un raggio luminoso ad intervalli di tempo regolari. La presenza di un laser in realtà non è indispensabile: in alcuni casi è sufficiente ad esempio una luce stroboscopica)
- 3) dei dispositivi ottici per trasformare la sorgente di luce in un piano luminoso (tipicamente una lente cilindrica e una sferica nel caso in cui la sorgente di luce sia un raggio laser). Tale piano costituisce il vero e proprio piano di misura, dove cioè, punto per punto, saranno determinate le due componenti del vettore velocità'.
- 4) un sistema di registrazione delle immagini delle particelle che si trovano nel piano di misura e che "riemettono" la luce del laser. La loro posizione viene registrata sulla pellicola di una macchina fotografica o di una telecamera.
- 5) un software opportuno per il calcolo del campo di velocità', che permetta cioè di stabilire la posizione di "ogni" particella in due istanti successivi, e ne calcoli quindi lo spostamento nell'intervallo di tempo corrispondente.

Come detto, le immagini delle particelle traccianti sono registrate almeno due volte in rapida successione. Nel caso della fig. 25 abbiamo cinque posizioni successive della particella in basso a destra.

Si possono in realtà seguire diverse strategie per l'acquisizione delle immagini delle particelle. In particolare possiamo avere:

- 1) un unico fotogramma con le posizioni successive delle singole particelle nei diversi istanti di tempo (single-frame, multi-exposure). Si ottiene con un laser pulsato ed un'unica esposizione della macchina fotografica. È il caso rappresentato in fig. 31, dove l'obiettivo della macchina fotografica viene lasciato aperto mentre il laser emette 5 impulsi.
- 2) due (o più) fotogrammi, ognuno con la posizione delle particelle negli istanti di tempo considerati (multi-frame, single exposure). Si ottiene, per esempio, con un laser *continuo* e due (o più) scatti della macchina fotografica (fig. 30).

Analisi dell'immagine

Le immagini PIV sono analizzate suddividendole in tanti piccoli sottodomini (zone d'interrogazione), all'interno delle quali si considera il campo di velocità uniforme (fig. 26). All'interno di ogni zona d'interrogazione verrà dunque determinato un solo vettore velocità. Per capire come ricavare il campo di velocità, possiamo considerare il

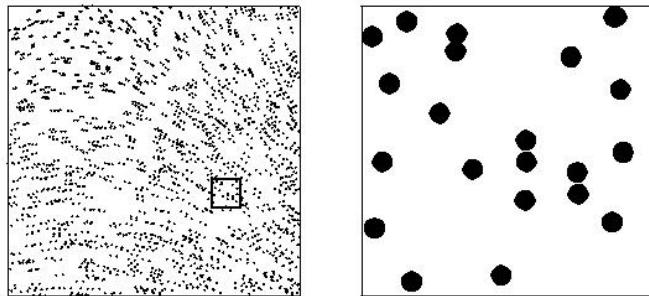


Figura 26:

semplice caso di una zona d'interrogazione estratta da due frames separati (modalità "multi-esposizione")

Come si vede, in ogni zona di interrogazione sono normalmente presenti molte particelle (tipicamente più di 15-20), e non è quindi possibile stabilire l'esatta posizione occupata da *ciascuna* particella negli istanti di tempo considerati (è questo il caso della PIV propriamente detta: gli spostamenti di ogni particella fra uno scatto e l'altro sono molto maggiori della distanza media fra le particelle, e quindi non possono essere determinati precisamente per *ogni* particella; nel caso della Particle Tracking ("inseguimento") Velocimetry, invece, la densità di particelle inseminanti è molto bassa, dunque gli spostamenti sono molto più piccoli della distanza media fra due

particelle, ed e' possibile "inseguire" le singole particelle). Nel caso della PIV, si ricorre allora ad un'indagine statistica, si determina cioè lo spostamento *più probabile* subito da *tutte* le particelle della singola zona d'interrogazione. Questa operazione viene normalmente realizzata tramite la funzione di correlazione (più precisamente una cross-correlazione nel caso di 2 o piu' frames e di un'autocorrelazione nel caso di un unico frame).

Piu' semplicemente, si puo' pensare di calcolare lo spostamento medio all'interno di una singola zona di interrogazione nel seguente modo: consideriamo una particella della zona d'interrogazione che all'istante iniziale t_1 si trova nella posizione P_1 e nella posizione P'_1 all'istante successivo t'_1 (fig. 27). Supponiamo inoltre che le altre particelle si siano spostate esattamente della stessa distanza (in questo caso particolare, che abbiano traslato della stessa quantità nella sola direzione orizzontale). Lo spostamento comune a tutte le particelle della zona d'interrogazione sarà dunque pari a $(\Delta x, 0)$.

Determiniamo l'istogramma dei possibili spostamenti in direzione orizzontale della particella che si trova in P_1 all'istante iniziale. I possibili vettori spostamento sono, evidentemente, quelli rappresentati in fig. 27 e l'istogramma relativo a questi spostamenti assomiglierà a quello indicato in fig. 28. Lo stesso procedimento puo' essere applicato a tutte le altre particelle presenti nel primo frame (si può cioè costruire l'istogramma dei possibili spostamenti, sempre in direzione orizzontale, della particella che si trova in P_2 all'istante iniziale, e sommarlo all'istogramma precedente. Costruendo l'istogramma relativo a tutte le particelle, i contributi relativi allo spostamento comune a tutte le particelle tenderanno a sommarsi, e l'istogramma presenterà un massimo in corrispondenza dello spostamento effettivo (fig. 29). Lo spostamento orizzontale (per ipotesi uniforme in tutta la zona di interrogazione) potra' dunque essere calcolato partendo dal picco dell'istogramma. Analogamente si puo' procedere per calcolare l'istogramma relativo agli spostamenti verticali delle particelle della singola zona d'interrogazione (e l'istogramma presenterebbe in questo caso un massimo in corrispondenza dello zero).

Nella realta' si utilizza, come accennato, la funzione di cross-correlazione. L'immagine viene cioe' digitalizzata, e quindi e' possibile calcolare, per ciascuno dei frames, la funzione $I(x,y)$ (con I intero compreso fra 0 e 255) rappresentante l'intensità luminosa nel generico punto (x,y) (fig. 30). Semplificando le cose, la funzione $W(x,y)$ raggiungerà il suo valore massimo in ogni punto ("pixel") (\bar{x}, \bar{y}) dove si trova una particella ("nero"), mentre raggiungerà il suo valore minimo ("bianco") in ogni pixel dove non ci sono particelle. Disponendo di due frames separati avremo due funzioni $W_1(x, y)$ e $W_2(x, y)$, relative al primo e al secondo frame rispettivamente. Si può quindi calcolare la cross-correlazione fra le due funzioni W_1 e W_2 , definita come

$$R(\Delta x, \Delta y) = \int \int W_1(x, y) W_2(x + \Delta x, y + \Delta y) dx dy. \quad (27)$$

Se *tutte* le particelle si sono spostate della stessa quantità $(\bar{\Delta x}, \bar{\Delta y})$, allora la funzione di cross-correlazione sarà ovunque zero, tranne in corrispondenza dello shift $(\Delta x, \Delta y) = (\bar{\Delta x}, \bar{\Delta y})$. Lo spostamento può dunque essere ricavato individuando il

massimo della funzione di cross-correlazione (nella realtà, fig. 30, la funzione di cross-correlazione avrà un andamento più complicato di quello appena descritto, per via del fatto che non tutte le particelle si saranno spostate della stessa quantità, che alcune particelle saranno uscite dalla zona d'interrogazione o addirittura fuori dal piano di misura, del rumore di fondo.... Tuttavia, continuerà a presentare un massimo in corrispondenza dello spostamento più probabile subito dalle particelle della zona d'interrogazione)

Nel caso di un singolo frame, con più esposizioni (fig. 31), si procede al calcolo della funzione di *autocorrelazione* di $W_1(x, y)$:

$$R(\Delta x, \Delta y) = \int \int W_1(x, y)W_1(x + \Delta x, y + \Delta y) dx dy. \quad (28)$$

La funzione di (auto)correlazione presenterà sicuramente un massimo in corrispondenza dello spostamento $(0,0)$, ma esisteranno anche altri due picchi più piccoli, corrispondenti al valore dello spostamento (più o meno uniforme) delle particelle della zona di interrogazione (in effetti, con un solo frame, il verso dello spostamento rimane indeterminato).

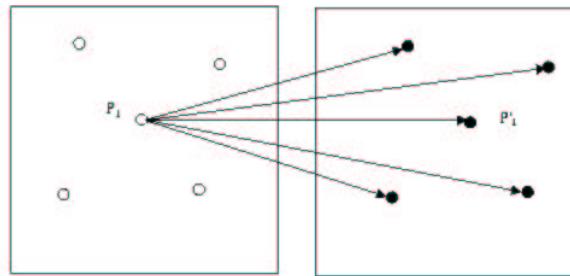


Figura 27:

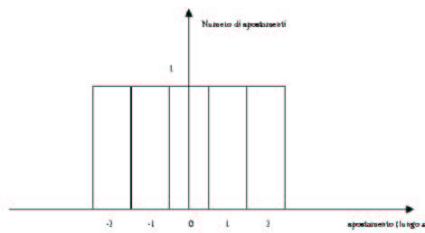


Figura 28:

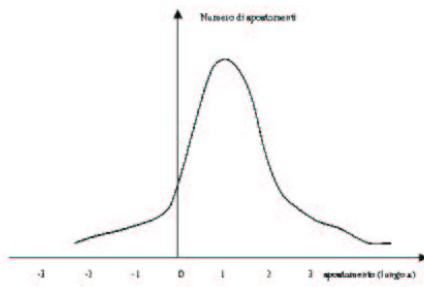


Figura 29:

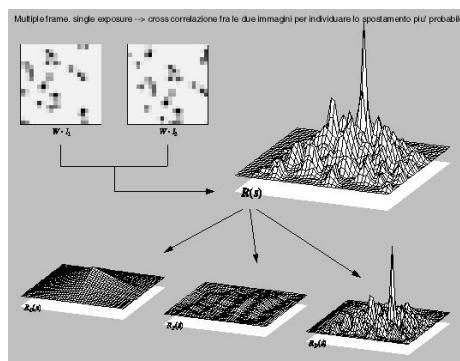


Figura 30:

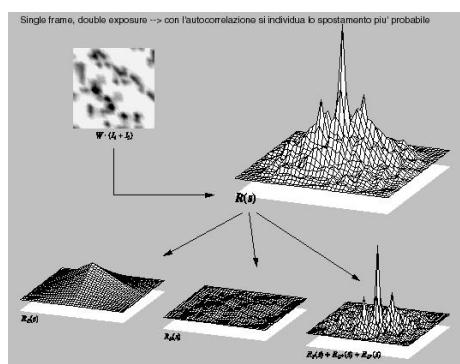


Figura 31: