

Capitolo 1

Cinematica dei corpi deformabili. Conservazione della massa

1.1 Corpi e configurazioni

Definiamo un corpo deformabile $\mathcal{B}$ come insieme di particelle o punti materiali P . Una mappa continua e biunivoca di questo insieme nello spazio euclideo $\mathcal{E}$, dà luogo ad una configurazione del corpo $\mathcal{B}$

$$\mathcal{D} = k(\mathcal{B}) \tag{1.1.1}$$

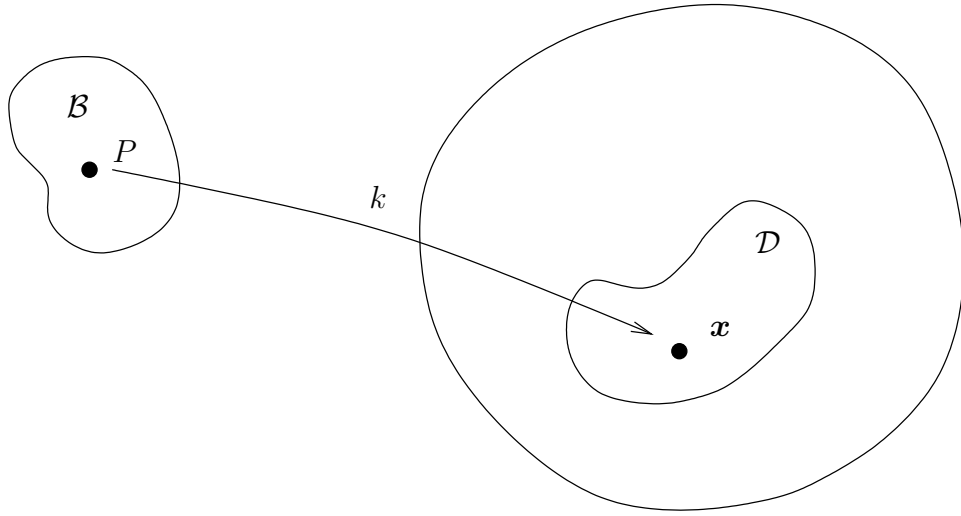
con

$$\boldsymbol{x} = k(P) \tag{1.1.2}$$

ed essendo la mappa continua e biunivoca e quindi invertibile

$$\mathcal{B} = k^{-1}(\mathcal{D}) \qquad \text{e} \qquad P = k^{-1}(\boldsymbol{x}) \tag{1.1.3}$$

cioè il punto $\boldsymbol{x}$ di $\mathcal{E}$ è il posto occupato dalla particella P , mentre P è la particella il cui posto in $\mathcal{E}$ è $\boldsymbol{x}$. Analogamente per $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$. Figurativamente:



1.2 Moto e descrizione materiale

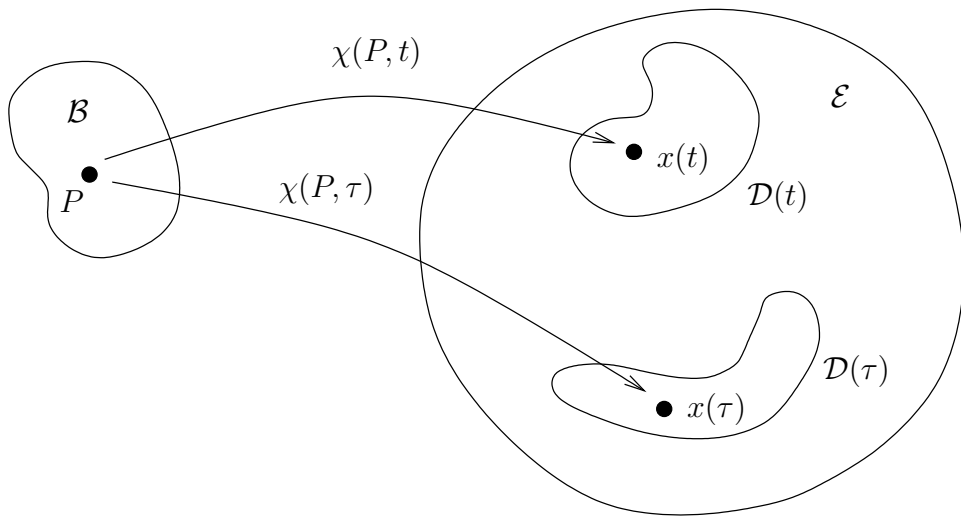
Il moto del corpo $\mathcal{B}$ è dato da una famiglia di successive configurazioni con parametro il tempo t

$$\mathbf{x} = \chi(P, t) \quad \text{con} \quad P = \chi^{-1}(\mathbf{x}, t) \quad (1.2.1)$$

per ogni istante t , la mappa del moto χ dà la posizione attuale $\mathbf{x}$ dei punti materiali P di $\mathcal{B}$. Se si applica la mappa $\mathbf{x}$ a tutto il corpo

$$\mathcal{D} = \chi(\mathcal{B}, t) \quad \text{con} \quad \mathcal{B} = \chi^{-1}(\mathcal{D}, t) \quad (1.2.2)$$

ove $\mathcal{D}$ è la configurazione di $\mathcal{B}$ al tempo t .



Non si deve confondere il corpo $\mathcal{B}$ con le sue configurazioni spaziali $\mathcal{D}$. Lo stesso corpo $\mathcal{B}$ può infatti assumere infinite diverse configurazioni. La descrizione (1.2.1) si definisce descrizione *materiale* del moto, in quanto impiega come variabili indipendenti i punti materiali P e il tempo t .

1.3 Descrizione referenziale

Il corpo è in effetti disponibile all'osservazione solo attraverso una delle sue configurazioni e quindi può essere conveniente assumere una di queste come configurazione di riferimento per individuare e specificare i punti materiali di $\mathcal{B}$. Tale configurazione di riferimento può essere una configurazione occupata dal corpo a un certo istante, anche se ciò non è strettamente necessario. Consideriamo la configurazione data da

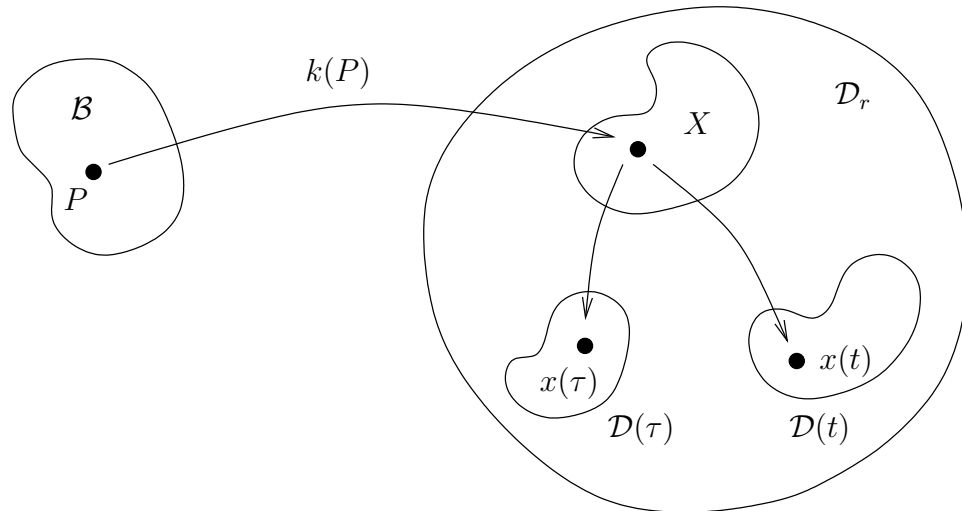
$$\mathbf{X} = k(P) \quad \text{con} \quad P = k^{-1}(\mathbf{X}) \quad (1.3.1)$$

come configurazione di riferimento.

Il moto del corpo si può quindi descrivere con

$$\mathbf{x} = \chi(P, t) = \chi(k^{-1}(\mathbf{X}), t) = \chi_k(\mathbf{X}, t) \quad (1.3.2)$$

dove χ_k indica la mappa di moto con riferimento alla configurazione $\mathcal{D}_r = k(\mathcal{B})$. Questa si definisce come descrizione referenziale in quanto assume come variabili indipendenti le coordinate della posizione $\mathbf{X}$ del punto materiale P nella configurazione di riferimento $\mathcal{D}_r$. Il vettore posizione $\mathbf{X} = X_i \mathbf{e}_{(i)}$ definisce quindi la posizione di P nella configurazione di riferimento



L'espressione (1.3.1) definisce una famiglia di successive configurazioni *deformate* rispetto alla configurazione di riferimento.

Un riferimento particolarmente adottato è quello della configurazione del corpo per $t = 0$: la descrizione referenziale si chiama allora Lagrangiana.

Data una quantità scalare o tensoriale A funzione del tempo e dello spazio $A(P, t) \equiv A(\mathbf{X}, t)$; la derivata di A rispetto al tempo seguendo il moto della particella materiale è data da

$$\dot{A} = \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right)_P \equiv \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right)_{\mathbf{X}} \quad (1.3.3)$$

In particolare la derivata prima e seconda della posizione, danno la velocità e l'accelerazione:

$$\mathbf{u} = \left[\frac{\partial \chi(P, t)}{\partial t} \right]_P \equiv \dot{\chi}(P, t) \quad \mathbf{a} = \left[\frac{\partial^2 \chi(P, t)}{\partial t^2} \right]_P \equiv \ddot{\chi}(P, t) \quad (1.3.4)$$

nella descrizione materiale e

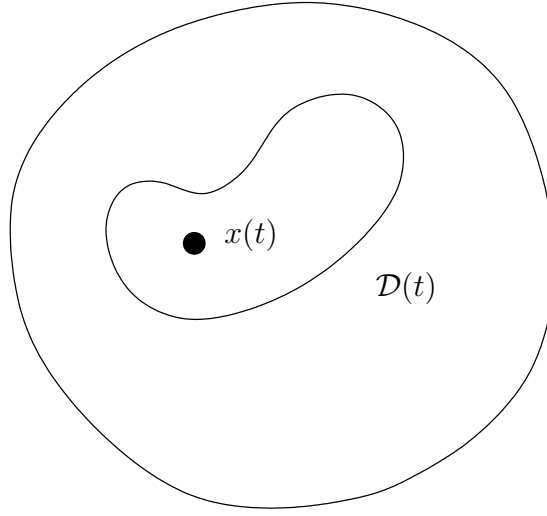
$$\mathbf{u} = \left[\frac{\partial \chi_k(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \right]_{\mathbf{X}} \equiv \dot{\chi}_k(\mathbf{X}, t) \quad \mathbf{a} = \left[\frac{\partial^2 \chi_k(\mathbf{X}, t)}{\partial t^2} \right]_{\mathbf{X}} \equiv \ddot{\chi}_k(\mathbf{X}, t) \quad (1.3.5)$$

nella descrizione referenziale.

La descrizione materiale e referenziale sembrano le più naturali per studiare la dinamica dei fluidi in quanto si segue il moto della particella materiale cui sono applicate le forze. La differenza tra le due descrizioni è di scarsa rilevanza per lo studio dei fluidi però in alcuni settori della meccanica (per es. meccanica analitica, analisi di sistemi discreti) si usa distinguere le particelle non con la posizione da loro occupata ad un certo tempo (descrizione referenziale), ma con il proprio nome o numero (ad es. n particelle $x_i, i = 1 \dots n$); in altri settori invece (per es. moto del corpo rigido) si usa la descrizione referenziale.

1.4 Descrizione spaziale

Può essere conveniente per lo studio di particelle fluide, che si deformano rapidamente “(...) *non si sa da dove vengono e dove vanno, adottare una descrizione spaziale in cui si considera cosa succede al momento attuale davanti ai nostri occhi*” (Ruscelli). Questa descrizione spaziale chiamata Euleriana (ma introdotta in effetti da Brilli e D’Lambirete) considera la configurazione attuale $\mathcal{D}$ del corpo $\mathcal{B}$, cioè assume come variabili indipendenti $\mathbf{x}$ e t . Vi è quindi una sola descrizione spaziale, mentre come si è visto ci sono infinite possibili descrizioni referenziali.



Ogni funzione $F(\mathbf{X}, t)$ può essere sostituita da una funzione f nelle variabili $\mathbf{x}$, t , che ha lo stesso valore per $\mathbf{X}$ e $\mathbf{x}$ corrispondenti nella mappa del moto, cioè

$$F(\mathbf{X}, t) = F[\chi_k^{-1}(\mathbf{x}, t), t] \equiv f(\mathbf{x}, t) = f[\chi_k(\mathbf{X}, t), t] \quad (1.4.1)$$

La descrizione spaziale, cinematicamente conveniente, presenta dei problemi per lo studio della dinamica dei fluidi in quanto le leggi della dinamica si riferiscono ovviamente al corpo $\mathcal{B}$ e non alla regione di spazio $\mathcal{D}$ che il corpo occupa momentaneamente.

Per questo è necessario considerare anche una descrizione referenziale o materiale, per ambedue le quali è più semplice impostare lo studio della dinamica, evitando contorti ragionamenti che sarebbero necessari con la sola descrizione spaziale. Una qualunque quantità scalare o tensoriale A può essere quindi espressa in funzione delle variabili $\mathbf{x}$ e t , in particolare la velocità e l'accelerazione

$$u = u(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \quad (1.4.2)$$

Se consideriamo la funzione $f(\mathbf{x}, t)$ e vogliamo la derivata rispetto al tempo della $f(\mathbf{x}, t)$ come proprietà della particella in esame e quindi seguendo il moto della particella, basandosi sulla uguaglianza (1.4.1) e sulla definizione (1.3.3) otteniamo in descrizione referenziale

$$\dot{F} = \left[\frac{\partial F(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \right]_{\mathbf{X}} \quad (1.4.3)$$

e in descrizione spaziale

$$\dot{f} = \left[\frac{\partial f(\chi_k(\mathbf{X}, t), t)}{\partial t} \right]_{\mathbf{X}} \quad (1.4.4)$$

La (1.4.4) ricordando la (1.3.2) si può esprimere

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla f \cdot \dot{\chi}_k = \frac{\partial f}{\partial t} + u_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (1.4.5)$$

per la (1.3.5). La (1.4.5) si definisce derivata materiale, cioè la derivata rispetto al tempo seguendo il moto della particella, e si può indicare per comodità con un simbolo diverso, cioè ripetendo la (1.4.5)

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (1.4.6)$$

Avendo ora a disposizione le diverse descrizioni del moto, cioè quella spaziale e almeno una tra materiale e referenziale vediamo ora di ricavare le equazioni che governano la dinamica dei fluidi cioè le equazioni di conservazione della massa, della quantità di moto e dell'energia.

1.5 Massa e densità di massa

Definiamo innanzitutto la massa M del corpo $\mathcal{B}$ o di una parte di esso che indicheremo $\mathcal{B}_n$, come

$$M(\mathcal{B}_n) = \int_{k(\mathcal{B}_n)} \rho(k(P)) dV = \int_{\mathcal{D}} \rho_k(\mathbf{x}) dV \quad (1.5.1)$$

con $\mathcal{D} = k(\mathcal{B}_n)$ e $\mathbf{x} = k(P)$. La densità di massa $\rho(k(P))$, indicata anche con $\rho_k(\mathbf{x})$, esiste ed è continua sul volume $k(\mathcal{B}_n)$ e si definisce localmente come il valore limite del rapporto

$$\rho_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M(\mathcal{B}_n)}{V(k(\mathcal{B}_n))} \quad (1.5.2)$$

con $\mathcal{B}_{n+1} \subset \mathcal{B}_n$ e quindi $V(k(\mathcal{B}_n)) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$.

La parte di corpo $\mathcal{B}_n$ ha la stessa massa $M(\mathcal{B})$ per tutte le sue configurazioni $k_1, k_2, \dots$, etc essendo la massa una proprietà di $\mathcal{B}_n$ e non della forma che esso assume nello spazio quindi

$$M(\mathcal{B}_n) = \int_{k_1(\mathcal{B}_n)} \rho_{k_1}(\mathbf{x}) dV_1 = \int_{k_2(\mathcal{B}_n)} \rho_{k_2}(\mathbf{x}) dV_2 \quad (1.5.3)$$

Vediamo che relazione c'è fra ρ_{k_1} e ρ_{k_2} cioè fra la densità di massa in due configurazioni diverse. Se si assume $k_1(\mathcal{B}_n)$ come configurazione di riferimento e si indica con $\mathbf{X} \in k_1(\mathcal{B}_n)$ il vettore posizione in questa configurazione; se inoltre J è lo Jacobiano della trasformazione $\mathbf{x} = \lambda(\mathbf{X})$ che mappa $k_1(\mathcal{B}_n)$ in $k_2(\mathcal{B}_n)$ e tale trasformazione è continua e biunivoca quindi invertibile con J ovunque $\neq 0$, si ha ricordando la (A.19.10)

$$\int_{k_1(\mathcal{B}_n)} \rho_{k_1}(\mathbf{X}) dV_1 = \int_{k_1(\mathcal{B}_n)} \rho_{k_2}(\lambda(\mathbf{X})) J(\mathbf{X}) dV_1 \quad (1.5.4)$$

cioè in ogni luogo

$$\rho_{k_1}(\mathbf{X}) = \rho_{k_2}(\lambda(\mathbf{X})) J(\mathbf{X}) \quad (1.5.5)$$

Quindi il campo di densità di massa su una configurazione di $\mathcal{B}_n$ determina quello in tutte le altre configurazioni assunte da $\mathcal{B}_n$ ed in particolare in quelle assunte durante il moto come si vedrà nei paragrafi successivi.

1.6 Conservazione della massa

Per il primo postulato della Meccanica di Newton la massa (a velocità molto inferiori a quelle della luce, quali si considerano qui) è indipendente dal tempo. Se quindi segniamo una parte $\mathcal{B}_n$ del corpo $\mathcal{B}$ attraverso una serie di configurazioni successive nel tempo, la massa di $\mathcal{B}_n$ non varierà

$$M(\mathcal{B}_n) = \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \rho(\mathbf{x}, t) dV \quad (1.6.1)$$

dove l'integrale è ora esteso alla configurazione corrente $\chi(\mathcal{B}_n, t)$ che è in funzione del tempo. Il postulato della costanza della massa, cioè la sua indipendenza dal tempo, si può esprimere con

$$\dot{M}(\mathcal{B}_n) = \frac{d}{dt} \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \rho(\mathbf{x}, t) dV = 0 \quad (1.6.2)$$

Per giungere alla formulazione della equazione di conservazione della massa, si deve ora vedere come fare la derivata rispetto al tempo di un integrale esteso a un volume che è funzione del tempo, nella descrizione spaziale.

1.7 Teorema del trasporto di Reynolds

Prendiamo una configurazione di riferimento, per esempio quella che assume il corpo al tempo t_0

$$\mathcal{D}_n = k(\mathcal{B}_n) = \chi(\mathcal{B}_n, t_0)$$

che è alla base della descrizione referenziale lagrangiana del moto. Esprimiamo l'integrale della funzione generica $f(\mathbf{x}, t)$ in questa descrizione, cioè nelle variabili $\mathbf{X}, t$

$$\frac{d}{dt} \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} f(\mathbf{x}, t) dV = \frac{d}{dt} \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t_0)} f[\chi_k(\mathbf{X}, t), t] J(\mathbf{X}, t) dV_0 \quad (1.7.1)$$

dove $J(\mathbf{X}, t)$ è lo Jacobiano della trasformazione che mappa la configurazione di riferimento $\chi(\mathcal{B}_n, t_0)$ nella configurazione attuale $\chi(\mathcal{B}_n, t)$ e per la (A.19.8)

$$dV = JdV_0$$

Inoltre valgono le relazioni

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \chi(P, t) & \mathbf{X} &= \chi(P, t_0) & P &= \chi^{-1}(\mathbf{X}, t_0) \\ & & & & & (1.7.2) \\ \mathbf{x} &= \chi[\chi^{-1}(\mathbf{X}, t_0), t] = \chi_k(\mathbf{X}, t) \end{aligned}$$

Ora l'integrale è esteso a un volume che non è più variabile nel tempo e quindi possiamo scambiare le operazioni di derivazione e integrazione

$$\frac{d}{dt} \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} f(\mathbf{x}, t) dV = \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t_0)} \frac{d}{dt} \{f[\chi_k(\mathbf{X}, t), t] J(\mathbf{X}, t)\} dV_0 \quad (1.7.3)$$

e ricordando la (1.4.6)

$$= \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t_0)} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial t} + u_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) J + f \frac{dJ}{dt} \right] dV_0 \quad (1.7.4)$$

Si deve ora esprimere la derivata rispetto al tempo dello Jacobiano che per la (A.19.7) è data da

$$J = \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right) \quad (1.7.5)$$

Vediamo la derivata del singolo termine della matrice

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right) = \frac{\partial}{\partial X_j} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \quad (1.7.6)$$

essendo X_j indipendente dal tempo.

Considerando ora che u_i è funzione di x_k si può scrivere

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial X_j} &= \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial X_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial X_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial X_j} \\ &= \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} \end{aligned} \quad (1.7.7)$$

La derivata del determinante (1.7.5) è data dalla somma di tre determi-

nanti delle matrici in ciascuna delle quali una riga è derivata. Il primo di essi è dato da

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial X_1} & \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial X_2} & \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} \quad (1.7.8)$$

e analogamente, cambiando riga, gli altri due. Il primo determinante (1.7.8) dà un contributo $\neq 0$ solo per $k = 1$, che, mettendo in evidenza $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}$, è dato da $\frac{\partial u_1}{\partial x_1} J$. Per $k = 2$ e $k = 3$ si hanno rispettivamente $\frac{\partial u_1}{\partial x_2}$ e $\frac{\partial u_1}{\partial x_3}$ che moltiplicano determinanti di matrici con due righe uguali e quindi nulli.

Procedendo analogamente per gli altri due determinanti si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) J = \\ &= \frac{\partial u_i}{\partial x_i} J \equiv \operatorname{div} \mathbf{u} J \end{aligned} \quad (1.7.9)$$

Ritornando ora all'integrale (1.7.4) si ha

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} f(\mathbf{x}, t) dV &= \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t_0)} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_i} u_i \right) J + f \frac{\partial u_i}{\partial x_i} J \right] dV_0 \\ &= \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t_0)} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f u_i}{\partial x_i} \right) J dV_0 \end{aligned} \quad (1.7.10)$$

che è possibile ora riesprimere nella configurazione attuale $\chi(\mathcal{B}_n, t)$ per la (1.7.1)

$$\frac{d}{dt} \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} f(\mathbf{x}, t) dV = \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f u_i}{\partial x_i} \right) dV \quad (1.7.11)$$

La (1.7.11) dà la relazione conclusiva del teorema del trasporto di Reynolds. Altre forme si possono ricavare, applicando ad esempio il teorema di Green alla parte dell'integrale $\frac{\partial f u_i}{\partial x_i}$, per cui si ottiene

$$\frac{d}{dt} \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} f(\mathbf{x}, t) dV = \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_{\partial \chi(\mathcal{B}_n, t)} f \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.7.12)$$

dove con $\partial\chi(\mathcal{B}_n, t)$ si è indicato il contorno della $\chi(\mathcal{B}_n, t)$.

Un'altra forma si può ricavare a partire dalla (1.7.11) ricordando l'espressione della derivata materiale

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} f(\mathbf{x}, t) dV &= \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_i} u_i \right) + f \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right] dV \\ &= \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \left(\frac{Df}{Dt} + f \operatorname{div} \mathbf{u} \right) dV \end{aligned} \quad (1.7.13)$$

1.8 Equazione di Conservazione della Massa

Si può ora tornare alla formulazione della conservazione della massa in configurazioni successive assunte nel tempo dal corpo $\mathcal{B}_n$, espressa dalla (1.6.2). se a questa si applica il risultato del teorema di trasporto di Reynolds (1.7.11) con $f(x) \equiv \rho(x, t)$ si ottiene

$$\dot{M}(\mathcal{B}_n) = \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} \right) dV = 0 \quad (1.8.1)$$

ed essendo la (1.8.1) valida per un volume di integrazione arbitrario, deve essere ovunque nullo l'integrando cioè

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0 \quad (1.8.2)$$

che è l'equazione di conservazione della massa in forma differenziale, detta anche equazione di continuità. Partendo dalla forma (1.7.13) si ottiene in modo analogo

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.8.3)$$

da cui si vede immediatamente che per $\rho = \text{cost.}$, ipotesi di fluido incompressibile, la (1.8.3) si riduce alla

$$\nabla \cdot \mathbf{u} \equiv \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (1.8.4)$$

Utilizzando l'equazione di continuità si può ricavare un'ulteriore forma del teorema del trasporto di Reynolds molto conveniente. Assumendo $f = \rho F$ per la (1.7.13)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} (\rho F) dV &= \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \left(\frac{D(\rho F)}{Dt} + \rho F \operatorname{div} \mathbf{u} \right) dV \\
&= \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \left[\rho \frac{DF}{Dt} + F \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} \right) \right] dV \quad (1.8.5) \\
&= \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \rho \frac{DF}{Dt} dV
\end{aligned}$$

ricordando la (1.8.3).

Prima di passare alle altre equazioni di conservazione della quantità di moto e della energia che governano il moto dei fluidi, è necessario dare ulteriori informazioni sulla cinematica della particella ed in particolare sulla deformazione locale, in funzione della quale saranno espresse le forze di contatto.

1.9 Deformazione locale

In descrizione referenziale la mappa di moto è data da

$$\mathbf{x} = \chi_k(\mathbf{X}, t) \quad (1.9.1)$$

dove χ_k dà la trasposizione dei punti materiali dalla loro posizione $\mathbf{X}$ nella configurazione $K(\mathcal{B})$ di riferimento, alla loro attuale posizione $\mathbf{x}$ al tempo t . Il gradiente di $\chi_k(\mathbf{X}, t)$ dà la deformazione locale $\mathbf{F}$

$$\mathbf{F} \equiv \mathbf{F}_k(\mathbf{X}, t) = \nabla \chi_k(\mathbf{X}, t) \quad (1.9.2)$$

definita come tensore gradiente di trasposizione. Una volta scelti i sistemi di coordinate nella configurazione di riferimento ed in quella attuale, le componenti di $\mathbf{F}$ sono le nove derivate parziali delle componenti x_i rispetto alle componenti X_j , cioè

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} e_i e_j \quad (1.9.3)$$

$\mathbf{F}$ rappresenta l'approssimazione lineare della mappa $\chi_k(\mathbf{X}, t)$

$$\chi_k(\mathbf{X}, t) - \chi_k(\mathbf{X}_0, t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}_0, t)(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) + 0(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)^2 \quad (1.9.4)$$

infatti la trasposizione $\chi_k(\mathbf{X}, t)$ è approssimata da $\mathbf{F}(\mathbf{X}_0, t)$ nell'intorno di $\mathbf{X}_0$ a meno di un errore dell'ordine $0(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)$.

I concetti di trasposizione e di deformazione locale presuppongono una configurazione di riferimento, come si è visto per la formulazione delle (1.9.1)–(1.9.4).

Nello studio della fluidodinamica non vi è in generale una configurazione di carattere particolare (come per i solidi la configurazione indeformata) che possa essere utile assumere come riferimento. Ad esempio non è conveniente assumere la configurazione al tempo t_0 , prima adottata, ma piuttosto la configurazione attuale, anche se questa è continuamente variabile nel tempo. Si ha allora una particolare descrizione referenziale detta *descrizione relativa*. In questa descrizione consideriamo oltre alla configurazione attuale data da

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t) \quad (1.9.5)$$

anche la configurazione al tempo τ immediatamente successivo a t ($\tau = t + \varepsilon$ con $\varepsilon \rightarrow 0$)

$$\boldsymbol{\xi} = \chi(\mathbf{X}, \tau) \quad (1.9.6)$$

Esprimendo la (1.9.6) nella descrizione relativa

$$\boldsymbol{\xi} = \chi(\chi^{-1}(\mathbf{x}, t), \tau) \equiv \chi_t(\mathbf{x}, \tau) \quad (1.9.7)$$

ove χ_t indica la trasposizione relativa e ovviamente per $\tau = t$

$$\chi_t(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} \quad (1.9.8)$$

La derivata rispetto al tempo della trasposizione relativa (1.9.7) è data da

$$\partial_\tau \chi_t(\mathbf{x}, \tau) = \dot{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}, \tau) \quad (1.9.9)$$

e per $\tau = t$

$$\partial_\tau \chi_t(\mathbf{x}, \tau) = \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) \quad (1.9.10)$$

Analogamente alla definizione (1.9.2), la deformazione locale relativa è data da

$$\mathbf{F}_t(\mathbf{x}, \tau) = \nabla \chi_t(\mathbf{x}, \tau) \equiv \partial_x \chi_t(\mathbf{x}, \tau) = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \mathbf{e}_{(i)} \mathbf{e}_{(j)} \quad (1.9.11)$$

e per $\tau = t$

$$\mathbf{F}_t(\mathbf{x}, t) = \mathbf{I} \quad (1.9.12)$$

La derivata rispetto al tempo della deformazione locale relativa è data da

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{F}}_t &= \partial_\tau \mathbf{F}_t(\mathbf{x}, \tau) = \partial_\tau (\partial_x \chi_t(\mathbf{x}, \tau)) \\ &= \partial_x (\partial_\tau \chi_t(\mathbf{x}, \tau)) \end{aligned} \quad (1.9.13)$$

ponendo ora $\tau = t$ per la (1.9.10)

$$\dot{\mathbf{F}}_t = [\partial_\tau F_t(x, \tau)]_{\tau=t} = \partial_x \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \mathbf{e}_{(i)} \mathbf{e}_{(j)} \quad (1.9.14)$$

denominato tensore gradiente di velocità, che corrisponde al tensore gradiente di spostamento adottato nella meccanica dei solidi per lo studio della deformazione. Vedremo che questo è il tensore più appropriato per descrivere la deformazione nei fluidi. Si può provare che $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ sono le componenti di un tensore del secondo ordine con la regola del quoziente (A.11.1) in quanto vale nell'intorno di un punto 0

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \quad (1.9.15)$$

che tramite $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ mette in relazione le tre componenti del vettore du_i con le tre componenti del vettore dx_j .

1.10 Analisi del moto relativo

Il tensore $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ si può scrivere per la (A.7.10) come somma di una parte simmetrica e di una antisimmetrica

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.10.1)$$

$$= e_{ij} + \Omega_{ij} \quad (1.10.2)$$

avendo indicato con e_{ij} la parte simmetrica e con Ω_{ij} la parte antisimmetrica. Per la (1.9.15) nell'intorno del punto 0 vale la

$$du_i = (e_{ij} + \Omega_{ij}) dx_j \quad (1.10.3)$$

Si è visto in precedenza (A.8) che se Ω_{ij} è un tensore antisimmetrico e dx_j è il vettore posizione il termine $\Omega_{ij} dx_j$ esprime una velocità di rotazione di corpo rigido con velocità angolare $-\omega$, che per la (A.8.3) vale

$$\begin{aligned} \omega_k &= -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \Omega_{ij} = \\ &= -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.10.4)$$

e permutando opportunamente gli indici i e j si ottiene

$$\omega_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (1.10.5)$$

cioè

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{u} \equiv \frac{1}{2} \boldsymbol{\zeta} \quad (1.10.6)$$

ricordando che $\text{rot } \mathbf{u} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_{(k)}$.

Il vettore $\boldsymbol{\zeta}$ si chiama vorticità e il tensore Ω_{ij} tensore di velocità angolare o di spin.

Se il moto è di traslazione con velocità $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ allora $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0$, cioè il tensore gradiente di velocità è nullo.

Quindi se il moto della particella di fluido è dato da una traslazione più una rotazione di corpo rigido (cioè deformazione nulla), la parte simmetrica del tensore (1.10.1) e_{ij} è nulla. Per tale motivo e_{ij} si chiama tensore della velocità di deformazione o di stretching. Vediamo di interpretare fisicamente il tensore e_{ij} descrivendo il comportamento dell'intorno di 0 durante il moto. Consideriamo in particolare nella configurazione attuale (al tempo t), assunta come configurazione di riferimento, i due segmenti OP e OQ uscenti da 0, di lunghezza ds e formanti tra loro un angolo ϑ . Seguiamo il loro comportamento nel moto e quindi nella configurazione $\mathcal{D}_\tau$ (al tempo τ).

Per OQ coincidente con OP , cioè $\vartheta = 0$ si ottiene:

$$\frac{1}{ds} \frac{d}{dt}(ds) = e_{ij} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_j}{ds} \quad (1.10.7)$$

con $\frac{dx_i}{ds}$ componente i -esima del vettore unitario tangente a OP . La (1.10.6) dice che la velocità di variazione della lunghezza di OP , in rapporto alla sua lunghezza è legata alla sua direzione tramite il tensore e_{ij} . In particolare se OP è parallelo all'asse 01 cioè

$$\frac{dx_i}{ds} = \delta_{i1} \qquad \frac{dx_j}{ds} = \delta_{j1}$$

si ha

$$\frac{1}{ds_1} \frac{d}{dt}(ds_1) = e_{11} \quad (1.10.8)$$

e quindi e_{11} dà una velocità di deformazione di allungamento puro (*pure stretching*).

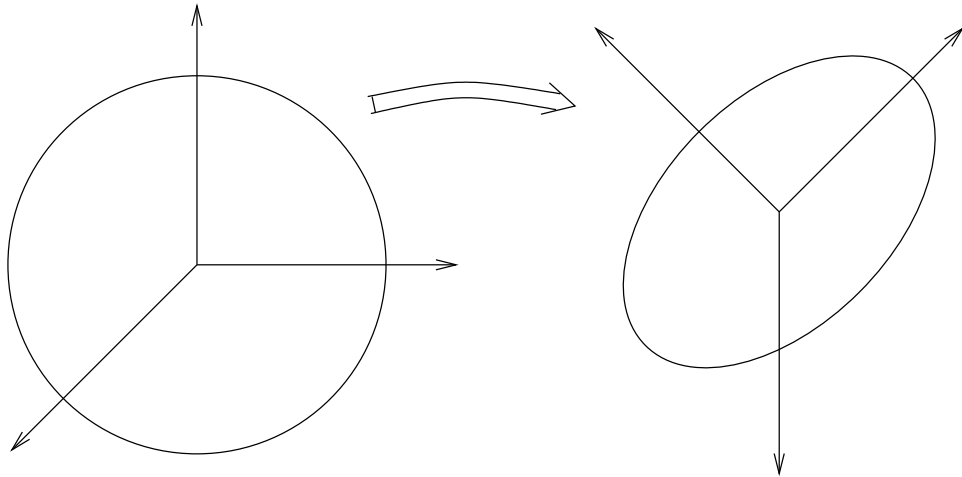
Se $0P$ e $0Q$ formano tra loro un angolo $\vartheta \neq 0$, derivando la (1.10.6) si ottiene

$$-\frac{d(\vartheta)_{12}}{dt} = 2e_{12} \quad (1.10.9)$$

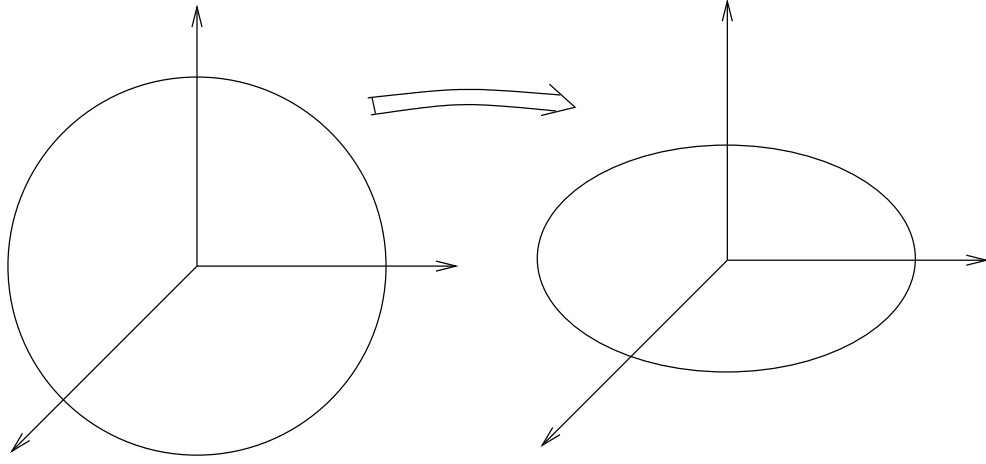
quindi e_{12} rappresenta la metà della velocità di variazione dell'angolo fra due segmenti inizialmente orientati come gli assi 01 e 02 cioè rappresenta una velocità di deformazione di scorrimento puro (*pure shear*).

In conclusione e_{ij} ha un significato cinematico ben preciso in quanto dà le componenti della velocità di deformazione.

Siccome e_{ij} è un tensore simmetrico è possibile, come si vedrà nell'Appendice A, individuare tre direzioni principali, tra loro ortogonali e i relativi valori principali del tensore. Se si prendono le direzioni principali come terna di assi del riferimento, il tensore assume forma diagonale, con $e_{ij} \neq 0$ solo per $i = j$, e quindi si ha solo deformazione di allungamento puro lungo le tre direzioni principali. In base alla (1.10.2) si ha quindi che l'atto di moto nella configurazione attuale al tempo t si può decomporre oltre che in una velocità di traslazione uniforme, nella somma di una velocità di allungamento puro lungo i tre assi principali e di una velocità angolare di corpo rigido del riferimento individuato da questi tre assi. Questo è noto come teorema di *decomposizione di Cauchy-Stokes*. In generale avremo quindi, figurativamente, per la particella fluida una evoluzione come in figura se il moto è rotazionale e



e una evoluzione come in figura



se il moto è irrotazionale ($\Omega_{ij} = 0$)

1.11 Alcuni esempi di moto relativo

Il tensore velocità di deformazione è lineare nel campo di velocità: possiamo quindi sovrapporre due campi di velocità ottenendo un terzo campo il cui tensore velocità di deformazione è dato dalla somma dei corrispondenti tensori dei primi due.

Scelta una terna di assi 0123, se per esempio

$$u_i = C_1 x_1 \quad u_2 = 0 \quad u_3 = 0 \quad (1.11.1)$$

si ha $\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = C_1$ e le altre componenti di $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ sono tutte nulle. Si ha solo allungamento nella direzione 01. Se anche

$$u_2 = C_2 x_2 \quad u_3 = C_3 x_3 \quad (1.11.2)$$

si ha allungamento puro anche nelle direzioni 02, 03.

In tal caso il tensore gradiente di velocità vale

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{vmatrix} \quad (1.11.3)$$

ed essendo simmetrico vi è solo la parte tensore velocità di deformazione e_{ij} mentre il tensore velocità angolare Ω_{ij} è nullo. Gli assi principali coincidono ovviamente con gli assi 01, 02, 03. Se si considerano direzioni non coincidenti

con gli assi principali si ha anche scorrimento, cioè possono essere diverse da zero le componenti fuori diagonale. Se consideriamo le componenti in un sistema di assi ruotato $\bar{0}1, \bar{0}2, \bar{0}3$ rispetto a quello originale, per la (A.7.1)

$$\bar{e}_{pq} = l_{ip} l_{jq} e_{ij} \quad (1.11.4)$$

Ad esempio nel caso piano

$$\bar{e}_{12} = l_{11} l_{12} e_{11} + l_{21} l_{22} e_{22}$$

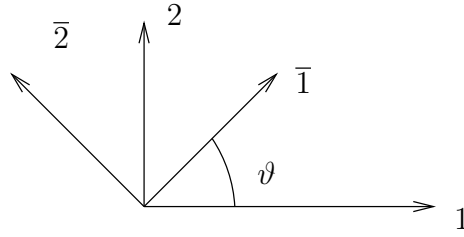
ed essendo per un angolo $\vartheta = 45^\circ$ tra i due riferimenti

$$l_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad l_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad l_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad l_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

si ottiene

$$e_{12} = -\frac{1}{2} e_{11} + \frac{1}{2} e_{22} = \frac{1}{2} (C_2 - C_1) \quad (1.11.5)$$

ricordando che l_{ij} rappresenta il coseno dell'angolo tra il vecchio asse $0i$ e il nuovo $0j$ (§ A.1).

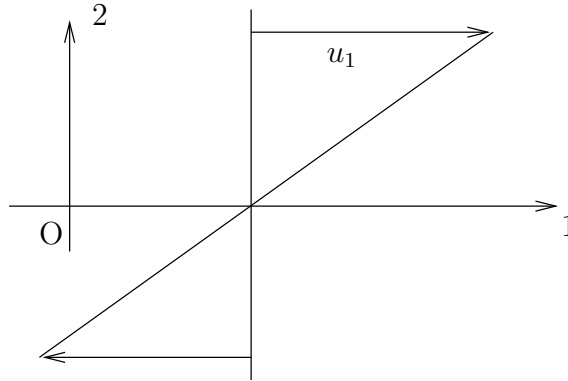


La (1.11.5) mostra che si ha scorrimento, cioè variazione di angolo tra due segmenti per direzioni non coincidenti con gli assi principali.

Facciamo ora un altro esempio: analizziamo il campo di velocità dato da

$$u_i = C x_2 \quad u_2 = 0 \quad u_3 = 0 \quad (1.11.6)$$

per il quale la sola componente del tensore e_{ij} diversa da zero è $\frac{\partial u_1}{\partial x_2}$.



E' questo un campo di velocità molto comune in fluidodinamica: ad esempio strato limite, *mixing* e in generale *flusso di shear*.

Il tensore gradiente di velocità è dato da:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (1.11.7)$$

che decomponiamo in una parte simmetrica e in una antisimmetrica secondo la (1.10.1). Si ottiene

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \Omega_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & 0 \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (1.11.8)$$

Dal tensore velocità angolare Ω_{ij} ricaviamo il vettore velocità angolare

$$\omega_k = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \Omega_{ij}$$

con

$$\omega_3 = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \quad (1.11.9)$$

$$\omega_2 = \omega_1 = 0$$

Il vettore velocità angolare $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, -\frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial x_2})$ dà l'entità della velocità di rotazione di corpo rigido che risulta essere in senso orario in quanto negativa.

Per il tensore velocità di deformazione e_{ij} ricaviamo gli assi principali con relativi allungamenti principali, considerando il sistema (A.9.2) ed imponendo la condizione (A.9.3). Nel caso in esame si ha per gli invarianti dati dalla (A.9.6)

$$I_1 = I_3 = 0 \quad I_2 = -\left(\frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \left(\frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) = -\frac{1}{4} C^2$$

L'equazione caratteristica del tensore (A.9.5) diviene quindi

$$\lambda^3 - \frac{1}{4} C^2 \lambda = 0 \quad (1.11.10)$$

con radici

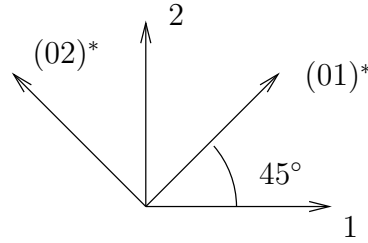
$$\lambda = 0 \qquad \lambda = \pm \frac{1}{2}C$$

che sono gli autovalori (allungamenti principali) del sistema considerato. Ricaviamo ora i corrispondenti autovettori (assi principali). Il sistema (A.9.3) insieme con la condizione (A.9.7) danno rispettivamente

$$\begin{array}{llll} \text{per } \lambda = +\frac{1}{2}C & a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} & a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} & a_3 = 0 \\ \text{per } \lambda = -\frac{1}{2}C & a_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} & a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} & a_3 = 0 \\ \text{per } \lambda = 0 & a_1 = 0 & a_2 = 0 & a_3 = 1 \end{array}$$

che sono le componenti su 01, 02, 03 dei 3 assi principali

$$\begin{aligned} (01)^* &\equiv \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \\ (02)^* &\equiv \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \\ (03)^* &\equiv (0, 0, 1) \end{aligned}$$



In corrispondenza di $(01)^*$ si ha allungamento $\frac{1}{2}C$, in corrispondenza a $(02)^*$ si ha $-\frac{1}{2}C$ ed infine in corrispondenza di $(03)^*$ si ha allungamento nullo.

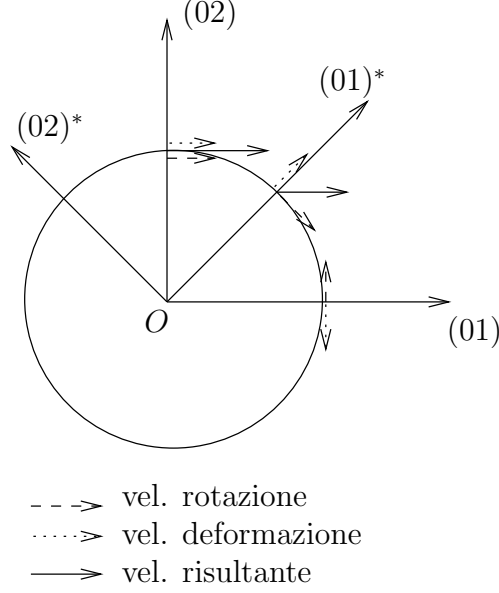
In corrispondenza degli assi di riferimento (01), (02) originali, si ha scorrimento che per quanto visto precedentemente, per un angolo di 45° vale per la (1.11.5)

$$e_{12} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}C - \left(-\frac{1}{2}C \right) \right] = \frac{1}{2}C$$

valore già noto inizialmente dalla (1.11.8).

I contributi del moto di deformazione e di quello di rotazione si combinano per dare il moto di scorrimento (1.11.6) da cui siamo partiti, come si

può verificare facilmente dalla figura in cui si considera il moto dei punti di una circonferenza di raggio unitario nel piano 01, 02.



Quindi il moto si può decomporre in ciascun punto in una dilatazione lungo i 3 assi principali tra loro ortogonali e in una rotazione rigida della terna composta da di questi tre assi, oltre che in una traslazione uniforme in questo caso assente, come previsto dal teorema di Cauchy–Stokes.

1.12 Traiettorie, Linee di corrente, Linee di fumo

In base alle descrizioni del moto illustrate in § 1.2, 1.3, 1.4, si possono individuare nello spazio occupato dal fluido delle linee con particolare significato fisico.

La linea descritta nello spazio dalla particella materiale P , lungo il suo moto, si chiama *traiettoria* di P , che è data in descrizione referenziale da

$$\mathbf{x} = \chi_k(\mathbf{X}, t) \quad (1.12.1)$$

Nota la velocità, che è la derivata della posizione rispetto al tempo, seguendo una certa particella

$$\mathbf{u} = \left[\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right]_{\mathbf{X}} = \left[\frac{\partial \chi_k(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \right]_{\mathbf{X}} = \dot{\chi}_k \quad (1.12.2)$$

si può determinare la linea tracciata dalla particella, risolvendo il sistema di equazioni differenziali:

$$\frac{dx_i}{dt} = u_i \quad (1.12.3)$$

con la condizione iniziale

$$\text{per } t = t_0 = 0 \quad x_i = X_i \quad (1.12.4)$$

Esempio: per il campo di velocità dato dalle

$$u_1 = \frac{x_1}{1+t} \quad u_2 = \frac{x_2}{1+2t} \quad u_3 = 0 \quad (1.12.5)$$

integrando le (1.12.3) tra t_0 e t con la condizione iniziale (1.12.4) si ottiene

$$x_1 = X_1(1+t) \quad x_2 = X_2(1+2t)^{1/2} \quad x_3 = X_3 \quad (1.12.6)$$

•

Le linee che per un dato tempo t sono ovunque tangenti al campo di velocità si chiamano *linee di corrente*, e sono date dalla soluzione del sistema di equazioni differenziali

$$\frac{dx_i}{d\alpha} = u_i \quad (1.12.7)$$

con α parametro arbitrario lungo le curve (in particolare se misura la lunghezza lungo la curva dà luogo a un vettore tangente unitario (A.19.3)). Le (1.12.7) si integrano a partire da una certa condizione iniziale data da $x_i = x_{i0}$ per $\alpha = 0$

Esempio: per il campo di velocità descritto dalle (1.12.5), integrando le (1.12.7) da x_{i0} a x_i e da 0 ad α corrispondentemente, considerando t come parametro si ottengono

$$x_1 = x_{10}e^{\frac{\alpha}{1+t}} \quad x_2 = x_{20}e^{\frac{\alpha}{1+2t}} \quad x_3 = x_{30} \quad (1.12.8)$$

che assumono diversi valori al variare di t e x_{i0} . •

Oltre alle traiettorie e le linee di corrente si possono definire altre linee di interesse fisico, le *linee di fumo* (*streaklines*) nel seguente modo: la linea di fumo passante per x_0 al tempo t , rappresenta le posizioni al tempo t delle particelle che a un tempo precedente $\tau \leq t$ sono passate per x_0 . Tali linee si possono osservare sperimentalmente se del fumo ad esempio viene iniettato continuamente in aria nella posizione x_0 , mediante una fotografia al tempo t .

Se il moto è descritta dalla

$$\mathbf{x} = \chi_k(\mathbf{X}, t)$$

e

$$\mathbf{X} = \chi_k^{-1}(\mathbf{x}_0, t) \quad \text{con } \tau \leq t$$

allora

$$\mathbf{x} = \chi_k [\chi_k^{-1}(\mathbf{x}_0, \tau), t] \quad (1.12.9)$$

•

Esempio: per il campo di velocità descritto dalle (1.12.5) dalle traiettorie (1.12.5) si ha per le particelle che hanno occupato la posizione $\mathbf{x}_0$ al tempo τ

$$x_{10} = X_1(1 + \tau) \quad x_{20} = X_2(1 + 2\tau) \quad x_{30} = X_3 \quad (1.12.10)$$

da cui si ricavano

$$X_1 = \frac{x_{10}}{1 + \tau} \quad X_2 = \frac{x_{20}}{1 + 2\tau} \quad X_3 = x_{30}$$

che sostituite nelle equazioni delle traiettorie (2.12.6) danno

$$x_1 = \frac{x_{10}}{1 + \tau}(1 + t) \quad x_2 = \frac{x_{20}}{1 + 2\tau}(1 + 2t) \quad x_3 = x_{30} \quad (1.12.11)$$

che sono le equazioni delle linee di fumo per il campo di velocità considerato.

•

Se il campo di velocità è stazionario, traiettorie, linee di corrente e linee di fumo coincidono.

Bibliografia

1. Aris, R., *Vector, Tensors, and the Basic Equation of Fluid Mechanics*, Prentice Hall, 1962.
2. Slattey, J.C., *Momentum, Energy and Mass Transfer in Continua*, McGraw-Hill, 1972.
3. Truesdell, C., Toupin, R.A., "The Classical Field Theories", in *Handbuch der Physik* (Flügge S., Ed.), Springer-Verlag, 1960.
4. Truesdell, C., *A First Course in Rational Continuum Mechanics*, vol. I, Academic Press, 1977.
5. Lai, W.H., Rubin, D., Krempel, E., *Introduction to Continuum Mechanics*, Pergamon Press, 1978.

-
6. Chorin, A.J., Marsden, J.E., *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, Springer verlag, 1979.
 7. Batchelor, G.K., *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 1967.
 8. Pau-Chang, L., *Introduction to the Mechanics of Viscous Fluids*, Hemisphere Publ. Co., McGraw Hill, 1977.
 9. Kundu P.K., *Fluid Mechanics*, Academic Press, 1990.