

Capitolo 2

Dinamica dei corpi deformabili. Conservazione della quantità di moto

2.1 Forze

Le forze che agiscono su un elemento \mathcal{B}_n del corpo B sono essenzialmente di due tipi:

- a) forze di massa che agiscono “direttamente” sul volume di \mathcal{B}_n , attraverso una interazione a grande distanza. Un esempio sono le forze di gravità e le forze elettromagnetiche. Tali forze agenti su \mathcal{B}_n si possono esprimere mediante l'integrale

$$\int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \rho \mathbf{f} dV \quad (2.1.1)$$

con \mathbf{f} forza per unità di massa;

- b) forze di contatto che agiscono sul volume di \mathcal{B}_n , attraverso la superficie di contorno. Se l'elemento di fluido considerato ha una porzione di superficie libera, cioè di contorno per il fluido, le forze di contatto possono essere date ad esempio da una pressione applicata su questa superficie o da una forza tangenziale. Se l'elemento di volume è interno al fluido, le forze di contatto sono quelle esercitate sulla superficie dal materiale circostante. Indicando la forza di contatto per unità di area con $\mathbf{t}_{(n)}$ dove con n si indica la normale uscente localmente dalla superficie, si ha

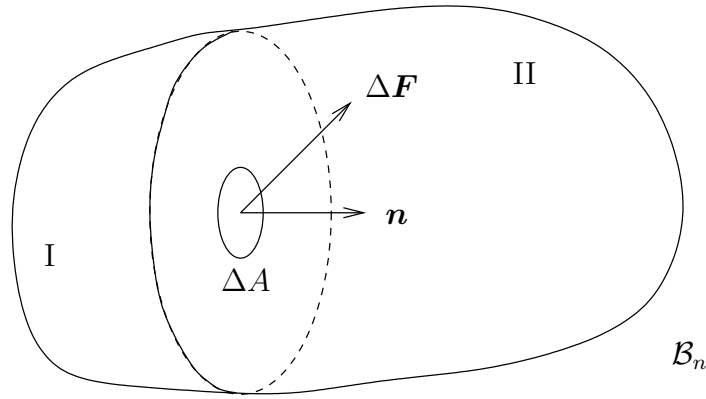
$$\mathbf{t}_{(n)} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A}$$

agente sulla porzione I di \mathcal{B}_n con

$$\mathbf{t}_{(n)} = -\mathbf{t}_{(n)} \quad (2.1.2)$$

che esprime il lemma di Cauchy. La forza totale esercitata sul volume attraverso la sua superficie è data da

$$\int_{\partial\chi(\mathcal{B}_n,t)} \mathbf{t}_{(n)} dS \quad (2.1.3)$$



2.2 Conservazione della quantità di moto

Il principio di conservazione della quantità di moto della meccanica di Newton esprime l'uguaglianza della variazione nel tempo della quantità di moto con la somma delle forze, dei due tipi sopra visti, applicate al volume di fluido considerato.

Essendo la quantità di moto

$$\int_{\chi(\mathcal{B}_n,t)} \rho \mathbf{u} dV \quad (2.2.1)$$

L'equazione di conservazione della quantità di moto (o prima legge di Eulero) si esprime in forma vettoriale, mediante le (2.1.1), (2.1.3), (2.2.1)

$$\frac{d}{dt} \int_{\chi(\mathcal{B}_n,t)} \rho \mathbf{u} dV = \int_{\chi(\mathcal{B}_n,t)} \rho \mathbf{f} dV + \int_{\partial\chi(\mathcal{B}_n,t)} \mathbf{t}_{(n)} dS \quad (2.2.2)$$

per il teorema di trasporto di Reynolds nella forma (1.8.5) il primo termine della (2.2.2) diviene

$$\frac{d}{dt} \int_{\chi(\mathcal{B}_n,t)} \rho u_i dV = \int_{\chi(\mathcal{B}_n,t)} \rho \frac{Du_i}{Dt} dV = \int_{\chi(\mathcal{B}_n,t)} \left(\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} \right) dV \quad (2.2.3)$$

Cerchiamo ora di analizzare l'integrale delle forze di contatto (2.1.3) e di esprimerlo in modo più appropriato.

Supponiamo che nell'eq. (2.2.2) la configurazione $\chi(\mathcal{B}_n, t)$ abbia dimensione caratteristica d . Il volume è quindi proporzionale a d^3 e l'area della superficie $\partial\chi(\mathcal{B}_n, t)$ di contorno è proporzionale a d^2 . Dividendo la (2.2.2) per d^2 e considerando il limite per $d \rightarrow 0$ si ottiene

$$\lim_{d \rightarrow 0} \frac{1}{d^2} \int_{\partial\chi(\mathcal{B}_n, t)} \mathbf{t}_{(n)} S = 0 \quad (2.2.4)$$

cioè le forze di contatto per unità di area, o tensioni, sono localmente in equilibrio.

2.3 Il tensore delle tensioni

Il vettore tensione $\mathbf{t}_{(n)}$ relativo a un elemento di superficie, è associato al vettore normale alla superficie tramite il tensore delle tensioni T_{ij} che esprime una trasformazione lineare tra le due classi di vettori $\mathbf{t}_{(n)}$ e \mathbf{n}

$$t_{(n)i} = T_{ij} n_j \quad (2.3.1)$$

che ricordando la (A.7.15) si può scrivere:

$$\mathbf{t}_{(n)} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \quad (2.3.2)$$

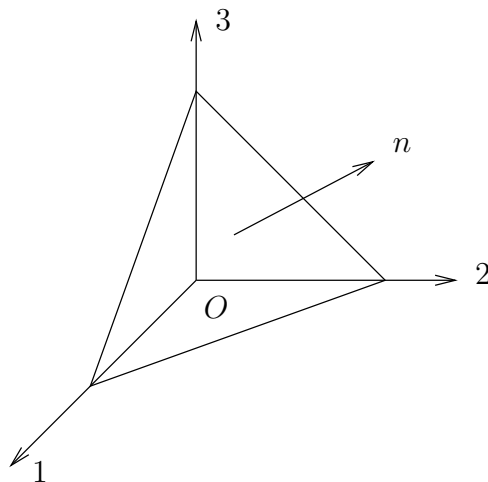
Per avere un'interpretazione fisica del tensore delle tensioni, seguiamo la dimostrazione di Cauchy.

Consideriamo il tetraedro (Fig. 2.2) con tre facce parallele ai piani coordinati del sistema con origine in 0 e la quarta faccia con normale $\mathbf{n} = n_i \mathbf{e}_{(i)}$.

Se dA è l'area della faccia obliqua, le altre facce \perp assi 0_i sono date da

$$dA_i = n_i dA \quad (2.3.3)$$

con normale uscente $\mathbf{e}_{(i)}$ e quindi la tensione è $-\mathbf{t}_{(i)}$ per la (2.1.2) mentre $\mathbf{t}_{(i)}$ corrisponde a normale uscente $+\mathbf{e}_{(i)}$.



Applicando l'equilibrio locale (2.2.4) al tetraedro di Fig. 2.2 con dimensione caratteristica d tendente a zero si ha

$$\mathbf{t}_{(n)}dA - \mathbf{t}_{(1)}dA_1 - \mathbf{t}_{(2)}dA_2 - \mathbf{t}_{(3)}dA_3 = 0 \quad (2.3.4)$$

e per la (2.3.3)

$$\mathbf{t}_{(n)} = \mathbf{t}_{(1)}n_1 + \mathbf{t}_{(2)}n_2 + \mathbf{t}_{(3)}n_3 \quad (2.3.5)$$

che dimostra che le tensioni in un punto 0 relative a 3 piani tra loro indipendenti (come quelli coordinati su cui è costruito il tetraedro in Fig. 2.2) determinano la tensione per qualunque superficie passante per quel punto.

Se indichiamo con T_{ij} la componente i -esima del vettore $\mathbf{t}_{(j)}$ e con $t_{(n)i}$ la componente i -esima di $\mathbf{t}_{(n)}$, possiamo riscrivere la (2.3.5) in termini di componenti

$$t_{(n)i} = T_{ij}n_j \quad (2.3.6)$$

ove T_{ij} associando le componenti del vettore $\mathbf{t}_{(n)}$ alle componenti del vettore \mathbf{n} da esso indipendente, per la regola del quoziente (A.11.1), sono le componenti di un tensore del secondo ordine.

Lo stato delle tensioni in questo punto, la cui posizione è \mathbf{x} , è completamente individuato dalle nove componenti del tensore $T_{ij}(\mathbf{x})$ e quindi in generale la (2.3.1) si scrive

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \quad (2.3.7)$$

che, essendo una relazione tensoriale, è valida per una qualunque rotazione degli assi coordinati, limitandosi qui a sistemi di coordinate cartesiane.

2.4 Conservazione della quantità di moto in forma differenziale

Se si sostituisce la (2.3.1) nella (2.2.2), tenendo conto della (2.2.3) si ottiene

$$\int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \rho \frac{Du_i}{Dt} dV = \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \rho f_i dV + \int_{\partial\chi(\mathcal{B}_n, t)} T_{ij} n_j dS \quad (2.4.1)$$

e applicando all'integrale superficiale il teorema di Green nella forma (A.15.2)

$$\int_{\partial\chi(\mathcal{B}_n, t)} T_{ij} n_j dS = \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} T_{ij,j} dV \quad (2.4.2)$$

Essendo ora tutti i termini dell'equazione costituiti da integrali estesi allo stesso volume, peraltro scelto arbitrariamente, l'equazione (2.4.1) può essere soddisfatta solo se è nullo l'integrando:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i + T_{ij,j} \quad (2.4.3)$$

nota anche come equazione di Cauchy.

Adottando per il teorema di trasporto di Reynolds la seconda forma riportata in (2.2.3) si ha

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = \rho f_i + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \quad (2.4.4)$$

che si può scrivere

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} = \rho f_i + (T_{ij} - \rho u_i u_j)_j \quad (2.4.5)$$

Ricordando che l'accelerazione è la derivata materiale della velocità, la (2.4.3) diviene in forma vettoriale

$$\rho \mathbf{a} = \rho \mathbf{f} + \nabla \cdot \mathbf{T} \quad (2.4.6)$$

2.5 Conservazione del momento della quantità di moto

Se si assume che tutte le coppie applicate alla particella di fluido derivano da momenti di forze macroscopiche (*fluidi non-polari*) allora si può ricavare dalla (2.2.2) l'equazione di conservazione del momento della quantità di moto (o seconda legge del moto di Eulero)

$$\frac{d}{dt} \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \rho (\mathbf{x} \times \mathbf{u}) dV = \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \rho (\mathbf{x} \times \mathbf{f}) dV + \int_{\partial\chi(\mathcal{B}_n, t)} \mathbf{x} \times \mathbf{t}_{(n)} dS \quad (2.5.1)$$

da cui si può dedurre la condizione di simmetria per il tensore delle tensioni \mathbf{T} nel caso considerato di fluidi non-polari.

Applicando al primo integrale e ricordando la (A.12.4)

$$\frac{d}{dt} \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \rho(\mathbf{x} \times \mathbf{u}) dV = \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \rho(\mathbf{x} \times \mathbf{a}) dV \quad (2.5.2)$$

essendo $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = 0$.

L'ultimo integrale della (2.5.1) scritto per la componente i -esima, diviene per il teorema di Green e ricordando la (2.3.1)

$$\int_{\partial\chi(\mathcal{B}_n, t)} \varepsilon_{ijk} x_j t(n)_k dS = \int_{\partial\chi(\mathcal{B}_n, t)} \varepsilon_{ijk} x_j T_{kl} n_l dS = \quad (2.5.3)$$

$$\int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \varepsilon_{ijk} (x_j T_{kl})_l dV = \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} (\varepsilon_{ijk} x_j T_{kl, l} + \varepsilon_{ijk} T_{kj}) dV$$

essendo $\varepsilon_{ijk, l} = 0$ e $x_{j, l} = \delta_{jl}$. Ritornando alla forma vettoriale si ha

$$\int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \mathbf{x} \times (\nabla \cdot \mathbf{T}) dV + \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \varepsilon_{ijk} T_{kj} \mathbf{e}_{(i)} dV \quad (2.5.4)$$

Sostituendo le (2.5.2) e (2.5.4) nella (2.5.1) e raggruppando alcuni termini si ottiene

$$\int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \mathbf{x} \times (\rho \mathbf{a} - \rho \mathbf{f} - \nabla \cdot \mathbf{T}) dV - \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \varepsilon_{ijk} T_{kj} \mathbf{e}_{(i)} dV = 0 \quad (2.5.5)$$

dove il primo integrale per la (2.4.5) è nullo. Essendo arbitrario il volume di integrazione, perché sia soddisfatta la (2.5.5) deve essere

$$\varepsilon_{ijk} T_{kj} \mathbf{e}_{(i)} = 0 \quad (2.5.6)$$

cioè devono essere indipendentemente uguali a zero tutte tre le componenti del vettore (2.5.6) e quindi

$$T_{32} - T_{23} = 0 \quad T_{13} - T_{31} = 0 \quad T_{21} - T_{12} = 0$$

cioè

$$T_{kj} = T_{jk} \quad (2.5.7)$$

che è la condizione di simmetria del tensore \mathbf{T} .

Nel caso di fluidi non polari si può quindi assumere il tensore delle tensioni simmetrico, e con tale assunzione non c'è più bisogno di considerare l'equazione di conservazione del momento della quantità di moto come

equazione indipendente. Essendo \mathbf{T} simmetrico vi sono tre direzioni principali fra loro ortogonali, rispetto alle quali il tensore assume forma diagonale, con i termini sulla diagonale dati dalle tensioni principali.

2.6 Fluidi polari

Si chiamano fluidi polari quei fluidi la cui microstruttura è meccanicamente importante. Per esempio: sospensioni gas-solido, liquido solido, fluidi con particelle cariche elettricamente soggetti a campi elettromagnetici esterni, etc. La microstruttura del fluido può essere meccanicamente importante anche se molto piccola, quando le dimensioni caratteristiche del problema sono dello stesso ordine di grandezza della microstruttura. Es.: strati sottili di lubrificanti, flussi superficiali, etc. In tutti questi casi una particella costituente la microstruttura può ruotare indipendentemente dal fluido circostante se ad essa viene direttamente applicata una coppia. Pertanto nello studio dei fluidi polari si introduce una variabile cinematica che dà la velocità angolare della particella indipendentemente dal campo di velocità circostante ed inoltre il tensore delle tensioni non è più simmetrico come per i fluidi non-polari. Si possono quindi introdurre coppie per unità di massa q applicate direttamente al volume (analoghe alle forze \mathbf{f}) e tensioni di coppia $\mathbf{c}_{(n)}$ agenti attraverso il contatto tramite la superficie di contorno (analoghe a $\mathbf{t}_{(n)}$). Analogamente a quanto detto per $\mathbf{t}_{(n)}$ in 2.3, si può definire il tensore \mathbf{C} tale che

$$\mathbf{c}_{(n)} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} \quad (2.6.1)$$

L'equazione di conservazione del momento della quantità di moto si scrive

$$\frac{d}{dt} \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} [\rho \mathbf{l} + \rho(\mathbf{x} \times \mathbf{u})] dV = \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \rho(\mathbf{q} + \mathbf{x} \times \mathbf{f}) dV + \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} [\mathbf{c}_{(n)} + \mathbf{x} \times \mathbf{t}_{(n)}] dS \quad (2.6.2)$$

dove $\rho \mathbf{l}$ è il momento della quantità di moto intrinseco delle particelle costituenti la microstruttura.

Ricordando la (2.5.2) e raggruppando i termini in modo da far apparire la (2.4.5) si ottiene, procedendo come in 2.5,

$$\begin{aligned} \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \mathbf{x} \times (\rho \mathbf{a} - \rho \mathbf{f} - \nabla \cdot \mathbf{T}) dV + \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \rho \frac{D\mathbf{l}}{Dt} dV + \\ \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} (\rho \mathbf{q} + \nabla \cdot \mathbf{C} + \varepsilon_{ijk} T_{kj} \mathbf{e}_{(i)}) dV = 0 \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

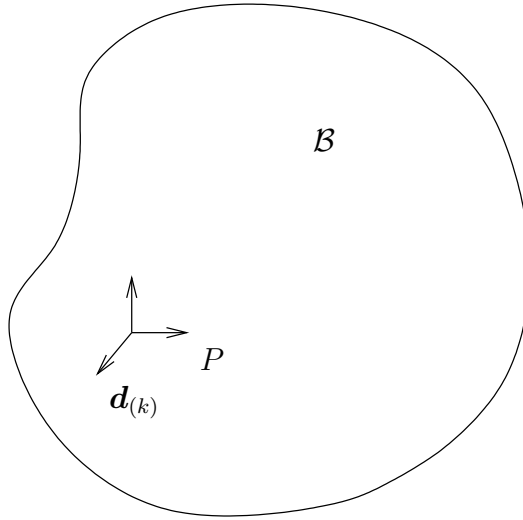
essendo per la (2.4.5) il primo integrale nullo ed essendo arbitrario il volume di integrazione, perché sia soddisfatta la (2.6.4) deve essere

$$\rho \frac{D\mathbf{l}}{Dt} = \rho \mathbf{q} + \nabla \cdot \mathbf{C} + \varepsilon_{ijk} T_{kj} \mathbf{e}_{(i)} \quad (2.6.4)$$

che si riduce alla (2.5.6) per $\mathbf{l}, \mathbf{q}, \mathbf{C}$ nulli cioè per fluidi non-polari.

Nei fluidi polari quindi il tensore delle tensioni non è simmetrico ed è necessario considerare l'equazione di conservazione del momento della quantità di moto per ricavare le componenti della quantità di moto intrinseco \mathbf{l} . Il fluido polare, caratterizzato cinematicamente da un campo di velocità del continuo e da un campo di velocità angolare della microstruttura tra loro indipendenti, si può studiare associando a ciascuna particella materiale P , introdotta in 1.1, una terna rigida ortonormale costituita dai 3 direttori $\mathbf{d}_{(k)}$, che soddisfano la

$$\mathbf{d}_{(k)} \cdot \mathbf{d}_{(e)} = \delta_{kl} \quad (2.6.5)$$



Il moto del corpo \mathcal{B} è dato non solo dalla (1.2.1), ma dall'insieme delle due relazioni

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \chi(P, t) \\ \mathbf{d}_{(k)} = \psi_k(P, t) \end{cases} \quad (2.6.6)$$

oltre che dalla (2.6.5). Ciascuna particella materiale è perciò una copia infinitesima di un corpo rigido con 6 gradi di libertà: 3 di posizione e 3 di orientamento. E' questo un particolare esempio di “*Continuo di Cosserat*”, nel quale alla particella materiale possono essere associati gradi di libertà di vario genere.

2.7 Comportamento dei fluidi

Finora non si è ancora specificato nulla sul tipo di fluido che consideriamo e nel suo comportamento durante il moto. Le equazioni di conservazione di massa, quantità di moto e momento della quantità di moto sono valide in generale indipendentemente dal tipo di fluido considerato. Da un punto di vista matematico, si sono introdotte nel sistema di equazioni le seguenti incognite: le 3 componenti u_i del vettore velocità, le 6 componenti T_{ij} (per fluidi non polari) del tensore delle tensioni e la densità ρ , supponendo nota la forza di massa f . Corrispondentemente si hanno a disposizione solo 4 equazioni, escludendo per fluidi non polari l'equazione di conservazione del momento di quantità di moto, e cioè: le 3 componenti dell'equazione vettoriale della conservazione di quantità di moto e l'equazione scalare della conservazione della massa.

E' quindi necessario fornire ulteriori informazioni sul comportamento del fluido: in particolare sulla dipendenza delle forze di contatto (e quindi T_{ij}) dal moto del corpo (e quindi u_i). Tali relazioni tra forze di contatto e moto, dette *equazioni costitutive*, sono basate sui seguenti assiomi, introdotti da Noll:

- *principio di determinismo*: la tensione in un corpo è determinata dalla storia del moto che il corpo ha avuto fino al tempo t , e non è quindi influenzata dal moto futuro del corpo
- *principio di effetto locale*: il moto del fluido al di fuori di un intorno abbastanza piccolo di una particella materiale P , può essere ignorato nel determinare la tensione in quel punto. Cioè il moto di una parte del corpo non ha effetto sulla tensione in un'altra parte del corpo stesso.
- *principio di indifferenza al sistema di riferimento* della risposta del materiale: le equazioni costitutive devono risultare invarianti per cambi del sistema di riferimento e quindi dell'osservatore.

2.8 Relazioni costitutive

Gli assiomi illustrati in 2.7 si possono utilizzare nel modo seguente per la costruzione delle relazioni costitutive dei fluidi.

Si può soddisfare il principio di determinismo assumendo che il tensore T_{ij} dipende solo dallo stato attuale di moto del fluido. Vedremo in seguito come considerare la eventuale dipendenza dalla storia passata. Il principio di effetto locale è soddisfatto se si assume che T_{ij} in un punto dipende solo dalla velocità e dal tensore gradiente di velocità in quel punto, oltre che

dai valori locali delle variabili di stato termodinamico, che preciseremo nel cap. 3.

$$T_{ij} = H\left(u_i, \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \text{stato termodinamico}\right) \quad (2.8.1)$$

Come noto, dal § 1.10, il tensore $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ è dato da una parte simmetrica di velocità di deformazione e da una parte antisimmetrica di velocità di rotazione di corpo rigido (1.10.2)

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = e_{ij} + \Omega_{ij} \quad (2.8.2)$$

Il principio di indifferenza dal sistema di riferimento impone che T_{ij} possa dipendere solo da e_{ij} . Consideriamo infatti un primo osservatore in un sistema di riferimento fisso con il laboratorio ed un secondo osservatore in un sistema di riferimento che trasla e ruota insieme al fluido per cui, rispetto a questo riferimento, il fluido ha $u = 0$, $\Omega_{ij} = 0$. Assumendo valida la (2.8.1) il primo osservatore troverebbe una dipendenza di T_{ij} da u_i e Ω_{ij} , il secondo no. Dovendo essere il comportamento del materiale lo stesso per ambedue gli osservatori, si deduce che

$$T_{ij} = H(e_{ij}, \text{stato termodinamico}) \quad (2.8.3)$$

cioè dipende solo dalla parte simmetrica del tensore gradiente di velocità.

Si può inoltre verificare sperimentalmente che un fluido a riposo presenta una particolare condizione di tensione: la tensione $\mathbf{t}_{(n)}$ in un punto relativa ad un'area dS , è sempre diretta secondo la normale \mathbf{n} all'area stessa, ed ha un valore indipendente dall'orientamento dell'area stessa. Ciò significa che

$$\mathbf{t}_{(n)} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = -p\mathbf{n} \quad (2.8.4)$$

e quindi in forma indiciale

$$T_{ij}n_j = -pn_i = -p\delta_{ij}n_j$$

cioè è sempre verificata per ogni n la relazione (A.9.2)

$$(T_{ij} + p\delta_{ij})n_j = 0 \quad (2.8.5)$$

quindi ogni direzione è una direzione principale del tensore (cioè il tensore è sferico) e il suo valore principale $-p$ è detto pressione idrostatica. Quindi per un fluido a riposo

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} \quad (2.8.6)$$

La pressione idrostatica p , per un fluido compressibile a riposo si può identificare con la pressione termodinamica.

Si accenna infine alla possibile dipendenza di T_{ij} dal passato, oltre che dallo stato attuale di moto, sopra considerato. Si può in tal caso tener conto della storia temporale della deformazione mediante una funzione memoria $\mathcal{M}(t-s)$, ove t è il tempo attuale e s è un tempo precedente $s \leq t$. La funzione memoria può essere ad esempio data da un esponenziale negativo in $(t-s)$, tale per cui la storia recente risulta più importante di quella remota. La $T_{ij}(t)$ si può allora esprimere in funzione di \mathcal{M} con relazione analoga alla (2.8.3)

$$T_{ij}(t) = H \left(\int_{-\infty}^t \mathcal{M}(t-s) e_{ij}(s) dS, \text{ stato termodinamico} \right) \quad (2.8.7)$$

2.9 Fluidi Stokesiani e Newtoniani

Si dice Stokesiano un fluido che verifica le seguenti ipotesi:

- a) T_{ij} è una funzione continua del tensore e_{ij} e dello stato termodinamico locale
- b) a riposo la tensione è data dalla pressione idrostatica cioè $T_{ij} = -p\delta_{ij}$
- c) è isotropo, cioè non ha direzioni preferenziali e quindi la relazione funzionale tra tensioni e deformazioni è indipendente dall'orientamento
- d) è omogeneo, cioè non dipende esplicitamente da x , ma tramite la variazione di e_{ij} e delle variabili termodinamiche con la posizione.

Sotto tali ipotesi la relazione costitutiva si può esprimere in generale mediante una relazione tensoriale del tipo:

$$T_{ij} = A'_{ij} + A''_{ijkl} e_{kl} + A'''_{ijklmn} e_{kl} e_{mn} + \dots \quad (2.9.1)$$

dove A', A'', A''' sono, per l'ipotesi c), tensori isotropi del tipo considerato in A.10 ed inoltre, per l'ipotesi d), possono dipendere dallo stato termodinamico ma non direttamente dalla posizione.

Se si assume che siano prevalenti i primi due termini della (2.9.1), cioè T_{ij} è una funzione lineare di e_{ij} , si ha la sotto-classe dei Fluidi Newtoniani, che qui di seguito consideriamo.

Ricordando dal § A.10 che i tensori isotropi del 2° ordine sono dati da δ_{ij} per una costante scalare e quelli del 4° ordine da una combinazione lineare dei prodotti $\delta_{ij}\delta_{kl}$, $\delta_{il}\delta_{jk}$, e $\delta_{ik}\delta_{jl}$, si può scrivere:

$$T_{ij} = A_0\delta_{ij} + A_1\delta_{ij}\delta_{kl}e_{kl} + A_2\delta_{il}\delta_{jk}e_{kl} + A_3\delta_{ik}\delta_{jl}e_{kl} \quad (2.9.2)$$

$$\begin{aligned} &= A_0\delta_{ij} + A_1\delta_{ij}e_{kk} + (A_2 + A_3)e_{ij} \\ &= (A_0 + A_1e_{kk})\delta_{ij} + A_4e_{ij} \end{aligned} \quad (2.9.3)$$

Se si assumono per le ipotesi b) e d)

$$A_0 = -p \quad A_1 = \lambda \quad A_4 = 2\mu \quad (2.9.4)$$

dove p è la pressione termodinamica e λ, μ sono coefficienti di viscosità, solitamente funzioni della temperatura, si ha

$$T_{ij} = (-p + \lambda e_{kk})\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (2.9.5)$$

che in assenza di moto verifica l'ipotesi b). La (2.9.5) è la relazione costitutiva per un fluido Newtoniano.

Per fluidi Stokesiani, più in generale, si deve considerare anche il terzo termine della (2.9.1) e si hanno relazioni costitutive del tipo

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \beta e_{ij} + \gamma e_{ik}e_{kj} \quad (2.9.6)$$

2.10 Pressione e tensione normale media

Se si considera il tensore tensione viscosa σ_{ij} la (2.9.5) si scrive

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma_{ij} \quad (2.10.1)$$

con

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (2.10.2)$$

La somma dei 3 valori sulla diagonale principale (traccia del tensore) per il tensore T_{ij} è data da:

$$T_{ii} = -3p + \sigma_{ii} \quad \text{con} \quad \sigma_{ii} = (3\lambda + 2\mu)e_{kk}$$

ed il valore medio

$$\frac{T_{ii}}{3} = -p + \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) e_{kk} \quad (2.10.3)$$

Per tensioni viscosse nulle, cioè in assenza di moto o nell'ipotesi di fluido perfetto

$$-p = \frac{1}{3}T_{ij} \equiv \frac{1}{3}(T_{11} + T_{22} + T_{33}) = -\bar{p} \quad (2.10.4)$$

cioè la pressione termodinamica è uguale alla tensione normale media \bar{p} .

Ciò è ancora valido se (vedi (2.10.3)) si considera (Stokes)

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu \quad (2.10.5)$$

che è una relazione molto particolare tra i due coefficienti di viscosità, valida in generale solo per gas monoatomici a bassa densità, oppure per le (1.10.1), (1.8.4)

$$e_{kk} = 0 \quad (2.10.6)$$

cioè per fluidi incompressibili ($\rho = \text{cost.}$)., In tal caso però p , perdendo il suo significato termodinamico, mantiene solo quello di tensione normale media.

In generale però dalla (2.10.3)

$$p - \bar{p} = \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) e_{kk} \quad (2.10.7)$$

dove $(\lambda + \frac{2}{3}\mu)$ è il coefficiente di viscosità di massa (*bulk viscosity*) che lega la tensione viscosa alla velocità di variazione di volume. Ricordando la (1.8.3)

$$p - \bar{p} = - \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \quad (2.10.8)$$

Si noti che l'ipotesi (2.10.5) annulla la viscosità di massa, che può avere ha un'influenza rilevante.

2.11 Equazioni di Navier Stokes

Le relazioni costitutive illustrate nei paragrafi precedenti danno quelle ulteriori informazioni sul comportamento del fluido, necessarie per la determinazione delle incognite (infatti l'aggiunta delle sei componenti (2.9.5) porta ad un bilancio tra numero di equazioni e numero di incognite.

Le espressioni (2.9.5) di T_{ij} si possono anche sostituire nelle equazioni di conservazione della quantità di moto, ottenendo un sistema ad un numero minore di equazioni anche se più complesse.

Considerando le (2.4.3) si calcola mediante la (2.9.5)

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(2\mu \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) \quad (2.11.1)$$

assumendo $\lambda = \text{cost.}$ e $\mu = \text{cost.}$ si può ottenere una forma più compatta

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (2.11.2)$$

sostituendo in (2.4.3) si ha

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (2.11.3)$$

o in forma vettoriale

$$\rho a = \rho f_i - \text{grad } p + (\lambda + \mu) \text{grad div } u + \mu \nabla^2 u \quad (2.11.4)$$

che è nota come equazione di Navier Stokes.

Se il fluido è incompressibile $u_{k,k} = 0$ per la (1.8.4) e la (2.11.3) diviene

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (2.11.5)$$

2.12 Condizioni al contorno

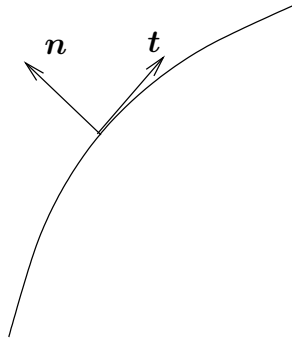
Il caso di contorno che separa il fluido da un solido è di particolare importanza nei problemi di fluidodinamica. In generale il fluido aderisce alle pareti solide con le quali viene a contatto per cui

$$u_i = U_i \quad \text{ovvero} \quad (U_{\text{rel}})_i = u_i - U_i = 0 \quad (2.12.1)$$

dove U_i è la velocità della parete solida. Alla relazione vettoriale (2.12.1) corrispondono le condizioni scalari

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\text{rel}} \cdot \mathbf{n} &= 0 \\ \mathbf{u}_{\text{rel}} \cdot \mathbf{t} &= 0 \end{aligned} \quad (2.12.2)$$

con \mathbf{n}, \mathbf{t} normale e tangente al contorno nel caso piano indicato in Fig. 2.4.



Per valori della densità del fluido molto piccoli, vi può essere una non-aderenza completa all'interfaccia fluido-solido cioè

$$\mathbf{u}_{\text{rel}} \cdot \mathbf{t} \neq 0 \quad (2.12.3)$$

queste condizioni si indicano col nome di *slip conditions*. La condizione di impermeabilità della interfaccia solido-fluido, rimane sempre valida, a meno di particolari condizioni di porosità delle pareti con iniezione o sezione di fluido, per le quali

$$\mathbf{u}_{\text{rel}} \cdot \mathbf{n} \neq 0 \quad (2.12.4)$$

queste condizioni sono di particolare importanza per problemi di raffreddamento di pareti, di distacco di strato limite, etc.

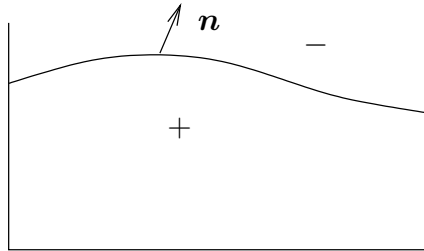
Molto importante nei problemi di fluidodinamica è anche il caso di contorno libero, cioè di interfaccia tra due fluidi non miscibili tra loro, ad es. liquido-liquido, liquido-gas. In tal caso la configurazione geometrica del contorno libero, dipende dalla soluzione del campo di velocità e di pressione, e viene quindi definita insieme con questi. Denominando con (+) e (-) i due fluidi, come nello schema di Fig. 2.5, si può scrivere come condizione all'interfaccia

$$[T_{ij}n_j]_{-}^{+} = \sigma H n_i \quad (2.12.5)$$

dove $[]_{-}^{+}$ indica la differenza dei valori alla interfaccia della quantità in parentesi, σ è la tensione superficiale e

$$H = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (2.12.6)$$

con R_1 e R_2 raggi di curvatura della superficie di interfaccia in due piani ortogonali contenenti \mathbf{n} .



Nel caso di tensioni viscosive trascurabili

$$T_{ij}n_j = -pn_i$$

la (2.12.5) si riduce alla

$$[-p]_{-}^{+} = \sigma H \quad (2.12.7)$$

che dà la configurazione di una superficie libera tra due fluidi a riposo: la pressione è in questo caso uniforme in ciascuno dei due fluidi e il salto di pressione costante lungo l'interfaccia.

Nel caso che anche la tensione superficiale sia trascurabile, si ottiene dalla (2.12.6) una condizione al contorno per la pressione alla superficie libera

$$(p)^+ = (p)^- \quad (2.12.8)$$

Altre possibili condizioni al contorno per il campo fluidodinamico verranno esaminate nello studio dei singoli problemi.

Bibliografia

1. Slattery, J.C., *Momentum, Energy and Mass Transfer in Continua*, McGraw-Hill, 1972.
2. Batchelor, G.K., *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 1967.
3. Lai, W.H., Rubin, D., Krepl, E., *Introduction to Continuum Mechanics*, Pergamon Press, 1978.
4. Aris, R., *Vector, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics*, Prentice-Hall, 1962.
5. Cowin, S.C., *The Theory of Polar Fluids*, Advances in Applied Mechanics, no. 12, Academic Press, 1972.