

Capitolo 4

Sistema completo di equazioni per la soluzione di campi fluidodinamici

4.1 Equazioni

Si richiamano qui le equazioni, nella loro forma più generale, ricavate nei capitoli precedenti. Per comodità di lettura si rinumerano le equazioni

- Equazione di conservazione della massa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4.1.1)$$

- Equazione di conservazione della quantità di moto:

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = \rho f_i + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \quad (4.1.2)$$

e si assume per T_{ij} la relazione costitutiva valida per fluidi newtoniani

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma_{ij} = (-p + \lambda e_{kk})\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (4.1.3)$$

e si sostituisce nella (4.1.2), si ottiene per λ e μ costanti

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (4.1.4)$$

- Equazione di conservazione dell'energia

$$\rho \left(\frac{DU}{Dt} + p \frac{D\frac{1}{\rho}}{Dt} \right) = \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho Q = \rho \vartheta \frac{DS}{Dt} \quad (4.1.5)$$

con q_i flusso di calore che può essere dato dalla relazione costitutiva (Fourier)

$$q_i = -K \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} \quad (4.1.6)$$

nella variabile ϑ si può esprimere nella forma

$$\rho c_v \frac{D\vartheta}{Dt} = - \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \left[\vartheta \left(\frac{\partial p}{\partial \vartheta} \right)_v \right] - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \rho Q \quad (4.1.7)$$

oppure a partire dalla forma entalpica

$$\rho c_p \frac{D\vartheta}{Dt} = \beta \vartheta \frac{Dp}{Dt} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \rho Q \quad (4.1.8)$$

con

$$\beta = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial \vartheta} \right)_p \quad c_p = \vartheta \left(\frac{\partial S}{\partial \vartheta} \right)_p \quad c_v = \vartheta \left(\frac{\partial S}{\partial \vartheta} \right)_v \quad (4.1.9)$$

- Equazione calorica di stato

$$U = \hat{U}(S, \rho) \quad (4.1.10)$$

o sue equivalenti $\vartheta = \hat{\vartheta}(S, \rho)$, $p = \hat{p}(S; \rho)$, $U = \hat{U}(\vartheta, \rho)$

- Relazioni termodinamiche per i coefficienti di conduzione termica e viscosità

$$\begin{aligned} k &= \hat{k}(S, \rho) \\ \mu &= \hat{\mu}(S, \rho) \\ \lambda &= \hat{\lambda}(S, \rho) \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

Se si assumono come incognite le variabili p, u_i, ρ, ϑ , considerando come già sostituite le relazioni (4.1.9) e (4.1.11), si hanno a disposizione le equazioni (4.1.1), (4.1.4), (4.1.7 o 4.1.8) e (4.1.10). Si hanno cioè 6 incognite e 6 equazioni e il sistema pertanto è chiuso.

4.2 Metodi di soluzione

Il sistema completo di equazioni descritto nel paragrafo precedente è risolvibile analiticamente solo in alcuni casi particolari molto semplici e con ipotesi molto restrittive. Vedremo in seguito alcune di queste soluzioni esatte.

In generale si può risolvere il sistema con metodi numerici, ma, data la sua complessità, anche questi presentano molte difficoltà e limiti di vario genere. E' quindi necessario, anche se si adottano soluzioni numeriche, provvedere a semplificazioni del sistema generale, trascurando ove possibile i termini meno importanti, a seconda del caso in esame, e individuando le condizioni limite per le quali le equazioni si possono semplificare in modo significativo.

Lo studio dei campi fluidodinamici si affronta in generale attraverso una composizione di questi casi limite (es. flusso potenziale + strato limite + urto, ...) o mediante soluzioni numeriche del sistema completo, che tengano però conto della esistenza locale di tali condizioni. Alle volte è sufficiente trovare una soluzione per una particolare condizione limite e per una particolare zona del campo e non è necessario né ricomporla con altre, né affrontare soluzioni più complesse. Le condizioni limite cui si è sopra accennato sono più facilmente individuabili mediante un'analisi dimensionale delle equazioni del sistema.

4.3 Forma adimensionale delle equazioni

Le equazioni in tale forma, con l'introduzione dei gruppi o parametri adimensionali, hanno una notevole importanza in quanto facilitano:

- a) la semplificazione matematica delle equazioni. La soppressione di alcuni termini può anche modificare il tipo di equazione come si vedrà in seguito (es. da ellittica a parabolica)
- b) la corretta similitudine sperimentale, cioè la conduzione di esperimenti validi per diverse condizioni fisiche, ma a parità di valore del o dei parametri adimensionali più rilevanti nel caso fisico in esame;
- c) l'accuratezza delle soluzioni numeriche in quanto, con una opportuna scelta dei valori di riferimento, si possono avere per le variabili di calcolo tutti valori dell' $O(1)$, concentrando le differenze numeriche nei parametri adimensionali.

Si definiscono le seguenti grandezze adimensionali $(\)^*$, indicando con $(\)_0$ i valori di riferimento, che dovranno essere scelti in base alle caratteristiche fisiche del problema in esame:

$$\begin{aligned}
 \rho^* &= \frac{\rho}{\rho_0} & u_i^* &= \frac{u_i}{U_0} & p^* &= \frac{p}{p_0} \\
 t^* &= \frac{t}{t_0} & x_i^* &= \frac{x_i}{L_0} & f_i^* &= \frac{f_i}{f_0} \\
 \vartheta^* &= \frac{\vartheta}{\vartheta_0} & \mu^* &= \frac{\mu}{\mu_0} & \lambda^* &= \frac{\lambda}{\mu_0} \\
 k^* &= \frac{k}{k_0} & c_v^* &= \frac{c_v}{c_0} & c_p^* &= \frac{c_p}{c_0} \\
 \sigma_{ij}^* &= \sigma_{ij} \frac{L_0}{U_0 \mu_0} & e_{ij}^* &= e_{ij} \frac{L_0}{U_0}
 \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

In queste variabili adimensionali l'equazione di conservazione di massa (4.1.1) diviene

$$\frac{\rho_0}{t_0} \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \frac{U_0 \rho_0}{L_0} \frac{\partial \rho^* u_i^*}{\partial x_i^*} = 0$$

che definendo il numero di Strouhal

$$\text{St} = \frac{t_0 U_0}{L_0} \tag{4.3.2}$$

si esprime

$$\frac{1}{\text{St}} \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \frac{\partial \rho^* u_i^*}{\partial x_i^*} = 0 \tag{4.3.3}$$

Il numero di Strouhal è il rapporto fra un tempo t_0 caratteristico del fenomeno e un tempo caratteristico del campo fluidodinamico $t_F = L_0/U_0$. Se non si esaminano fenomeni periodici, si può assumere $\text{St} = 1$ e cioè si prende t_F come tempo di riferimento t_0 .

Analogamente l'equazione di conservazione della quantità di moto (4.1.4) si può scrivere, considerando λ e μ costanti

$$\begin{aligned}
 \frac{U_0 \rho_0}{t_0} \frac{\partial \rho^* u_i^*}{\partial t^*} + \frac{\rho_0 U_0^2}{L_0} \frac{\partial \rho^* u_i^* u_j^*}{\partial x_j^*} = \\
 - \frac{p_0}{L_0} \frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \rho_0 f_0 \rho^* f_i^* + \frac{\mu_0 U_0}{L_0^2} \left(\frac{\lambda_0}{\mu_0} + 1 \right) \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left(\frac{\partial u_k^*}{\partial x_k^*} \right) + \frac{\mu_0 U_0}{L_0^2} \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^* \partial x_j^*}
 \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

che divisa per il coefficiente del termine convettivo $\frac{\rho_0 U_0^2}{L_0}$ e definendo i parametri adimensionali:

- numero di Reynolds

$$\text{Re} = \frac{\rho_0 U_0 L_0}{\mu_0} \quad (4.3.5)$$

che esprime il rapporto tra i termini convettivi e i termini viscosi dell'equazione

- numero di Froude

$$\text{Fr} = \frac{U_0^2}{f_0 L_0} \quad (4.3.6)$$

che esprime il rapporto tra i termini convettivi e il termine della forza di massa

- numero di Ruark

$$\text{Ru} = \frac{\rho_0 U_0^2}{p_0} \quad (4.3.7)$$

che esprime il rapporto tra i termini convettivi e il termine di pressione. Nella maggior parte dei casi i gradienti di pressione sono fortemente legati alle forze di inerzia e pertanto si può assumere $\rho_0 U_0^2$ come pressione di riferimento e cioè $\text{Ru} = 1$.

Introducendo questi parametri adimensionali nell'equazione (4.3.4) si ottiene

$$\begin{aligned} \text{St} \frac{1}{\partial t^*} + \frac{\partial \rho^* u_i^*}{\partial x_j^*} &= -\frac{1}{\text{Ru}} \frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \frac{1}{\text{Fr}} \rho^* f_i^* \\ &+ \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\lambda_0}{\mu_0} + 1 \right) \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left(\frac{\partial u_k^*}{\partial x_k^*} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^* \partial x_j^*} \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

L'equazione di conservazione dell'energia nella variabile ϑ (4.1.7) si scrive per $k = \text{cost}$

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta_0 \rho_0 c_0}{t_0} \rho^* c_v^* \frac{\partial \vartheta^*}{\partial t^*} + \frac{\vartheta_0 \rho_0 c_0 U_0}{L_0} \rho^* c_v^* u_i^* \frac{\partial \vartheta^*}{\partial x_i^*} &= \frac{k_0 \vartheta_0}{L_0^2} \frac{\partial^2 \vartheta^*}{\partial x_j^* \partial x_j^*} \\ &+ \frac{U_0^2 \mu_0}{L_0^2} \sigma_{ij}^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} - \frac{p_0 U_0}{L_0} \left[\vartheta^* \left(\frac{\partial p^*}{\partial \vartheta^*} \right)_v \right] \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i^*} \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

che divisa per il coefficiente del termine convettivo $\frac{\rho_0 c_0 \vartheta_0 U_0}{L_0}$ e definendo i parametri adimensionali:

- numero di Prandtl

$$\text{Pr} = \frac{c_0 \mu_0}{k_0} \quad (4.3.10)$$

che esprime il rapporto tra la diffusività della quantità di moto e quella dell'energia

- numero di Péclet

$$\text{Pe} = \frac{c_0 \rho_0 U_0 L_0}{k_0} = \text{Pr} \cdot \text{Re} \quad (4.3.11)$$

che esprime il rapporto tra i termini convettivi e diffusivi (conduzione termica) dell'equazione

- numero di Brinkman

$$\text{Br} = \frac{U_0^2 \mu_0}{k_0 \vartheta_0} \quad (4.3.12)$$

che esprime il rapporto tra quantità di calore proveniente dalla dissipazione viscosa e la quantità di calore trasmessa per conduzione.

- numero di Eckert

$$\text{E} = \frac{U_0^2}{\vartheta_0 c_0} = \frac{\text{Br}}{\text{Pr}} \quad (4.3.13)$$

si può scrivere nella forma adimensionale:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{St}} \rho^* c_v^* \frac{\partial \vartheta^*}{\partial t^*} + \rho^* c_v^* u_i^* \frac{\partial \vartheta^*}{\partial x_i^*} &= \frac{1}{\text{Pe}} \frac{\partial}{\partial x_i^*} \frac{\partial \vartheta^*}{\partial x_i^*} + \frac{E}{\text{Re}} \sigma_{ij} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} \\ &\quad - \frac{E}{\text{Ru}} \left[\vartheta^* \left(\frac{\partial p^*}{\partial \vartheta^*} \right)_v \right] \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i^*} \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

4.4 Convezione naturale. Approssimazione di Boussinesq

Si definiscono flussi a convezione naturale quelli in cui il moto è generato dalle forze di galleggiamento. Le differenze di temperatura vengono introdotte nel campo, per esempio, attraverso i contorni mantenuti a temperatura costante e le differenze di densità che si generano inducono il moto: il fluido caldo tende a salire e quello freddo a scendere.

Per studiare tali flussi si utilizza un sistema ridotto di equazioni ottenute a partire dal sistema completo di Navier-Stokes in cui si introducono alcune semplificazioni. Tali approssimazioni originariamente, proposte da Boussinesq, presuppongono che le variazioni di densità siano comunque nolte piccole

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} \ll 1,$$

in modo da poter considerare la densità costante in tutti i termini tranne che nel termine ove appare la forza di massa. Tale ipotesi si verifica se le differenze di temperatura caratteristiche del campo non sono molto elevate e le variazioni di pressione sono tali da poter trascurare gli effetti di comprimibilità. Sotto queste condizioni la densità si considera variabile con la temperatura ma non con la pressione ed è lecito esprimere le variazioni facendone lo sviluppo in serie di Taylor e fermendo lo sviluppo al primo ordine. Sotto tale ipotesi l'equazione di conservazione della massa si riduce alla sua forma valida per i flussi incomprimibili

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (4.4.1)$$

Per quanto riguarda l'equazione di conservazione della quantità di moto, la forza per unità di massa f_i è data dalla forza di gravità e pertanto si può esprimere in un sistema di assi cartesiani con z verticale verso l'alto come

$$f_i = (0, 0, -g_0) \quad (4.4.2)$$

e assumendo $f_0 = g_0$ si ottiene

$$f_i^* = \frac{f_i}{f_0} = (0, 0, -1) \quad (4.4.3)$$

Introduciamo quindi nel termine in Fr dell'equazione (4.3.8) corrispondente alle forze di massa l'espressione per la densità che si ottiene facendone lo sviluppo in serie di Taylor e fermando lo sviluppo al primo termine

$$\rho = \rho|_{\vartheta=\vartheta_0} + \left. \frac{\partial \rho}{\partial \vartheta} \right|_{\vartheta=\vartheta_0} (\vartheta - \vartheta_0) + \dots \quad (4.4.4)$$

Assumendo che la variazione di ρ con ϑ avvenga a $p = \text{cost}$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \vartheta} \Big|_{p=\text{cost}} = \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{1}{v} \right) \Big|_{p=\text{cost}} = -\frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \vartheta} \right)_{p=\text{cost}} \Big|_{\vartheta=\vartheta_0} = -\rho_0 \beta_0 \quad (4.4.5)$$

essendo $\beta = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial \vartheta} \right)_{p=\text{cost}}$ il coefficiente di espansione termica, e sostituendo nella (4.4.4), si ottiene

$$\rho = \rho_0 - \rho_0 \beta_0 (\vartheta - \vartheta_0) \quad (4.4.6)$$

e

$$\rho^* = 1 - \beta_0 \vartheta^* (\vartheta_1 - \vartheta_0) \quad (4.4.7)$$

in quanto la temperatura adimensionale si è definita come $\vartheta^* = \frac{\vartheta - \vartheta_0}{\vartheta_1 - \vartheta_0} = \frac{\vartheta - \vartheta_0}{\Delta \vartheta_0}$.

Il termine in Fr della (4.3.8) diviene:

$$\frac{1}{\text{Fr}} \rho^* f_i^* = \frac{f_i^*}{\text{Fr}} - \frac{\beta_0}{\text{Fr}} (\vartheta_1 - \vartheta_0) \vartheta^* f_i^* \quad (4.4.8)$$

Sostituendo l'espressione per il numero di Fr data dalla (4.3.6), l'ultimo termine vale

$$\frac{g_0 L_0}{U_0^2} \beta_0 \Delta \vartheta_0 \vartheta^* = \frac{g_0 \beta_0 \Delta \vartheta_0 \vartheta^* L_0^3}{\nu_0^2} \frac{\nu_0^2}{U_0^2 L_0^2} = \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \vartheta^* \quad (4.4.9)$$

avendo introdotto il

$$\text{numero di Grashof} \quad \text{Gr} = \frac{g_0 \beta_0 \Delta \vartheta_0 L_0^3}{\nu_0^2} \quad (4.4.10)$$

Si definisce inoltre il

$$\text{numero di Rayleigh} \quad \text{Ra} = \text{Gr} \cdot \text{Pr} \quad (4.4.11)$$

Il termine (4.4.8) si può quindi esprimere come

$$\frac{1}{\text{Fr}} \rho^* f_i^* = \frac{1}{\text{Fr}} f_i^* - \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \vartheta^* f_i^*. \quad (4.4.12)$$

A questo punto è necessaria una piccola digressione di validità generale. Vale infatti la pena ricordare che in un problema in cui le forze di massa

siano conservative il termine ρf_i si equilibra con il termine dovuto alla pressione idrostatica. L'espressione per quest'ultima si ottiene dall'equilibrio in assenza di moto espresso dalla

$$\rho f_i = \frac{\partial p_{id}}{\partial x_i} \quad (4.4.13)$$

che per forza conservativa $f_i = -\frac{\partial \Psi}{\partial x_i}$ può essere soddisfatta certamente se $\rho = \text{cost} = \rho_0$. Se la densità non è costante, applicando il rotore alla (4.4.13) si ha

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} \right) = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} + \rho \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} = 0$$

quindi

$$\nabla \rho \times \nabla \psi = 0 \quad (4.4.14)$$

cioè $\nabla \rho / \nabla \Psi$ e le superfici di livello di ρ e Ψ coincidono. Essendo $\rho = \rho(\Psi)$ sarà anche $p = p(\Psi)$ e quindi

$$\rho(\Psi) \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} = \frac{\partial p}{\partial \Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} \quad (4.4.15)$$

che ammette la soluzione per la pressione idrostatica

$$p_{id} = \int \rho(\Psi) d\Psi \quad (4.4.16)$$

che soddisfa la (4.4.13).

Ritornando quindi all'approssimazione di Boussinesq, il primo dei due termini dell'equazione (4.4.12) si equilibra con il termine dovuto alla pressione idrostatica e pertanto nell'equazione (4.3.8) rimane solo il termine in Gr/Re^2 , mentre si considera la pressione a meno della pressione idrostatica, $p' = p - p_{id}$. L'equazione della quantità di moto in forma adimensionale avendo posto $\text{St} = 1$ e $\text{Ru} = 1$ diviene

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial t^*} + u_j^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} = -\frac{\partial p'^*}{\partial x_i^*} - \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \vartheta^* f_i^* + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^* \partial x_j^*}. \quad (4.4.17)$$

Le approssimazioni di Boussinesq si completano considerando un'equazione per l'energia in forma di temperatura. Per ottenere la forma più appropriata si parte dall'equazione per l'entropia, introdotta nel capitolo 3

$$\rho \vartheta \frac{DS}{Dt} = \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} k \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} \quad (4.4.18)$$

nella quale abbiamo ipotizzato assenza di sorgenti di calore interne al campo ($\rho Q = 0$) e sostituito al flusso termico l'espressione di Fourier. Avendo ipotizzato che le variazioni delle quantità termodinamiche dovute alla pressione siano trascurabili la variazione dell'entropia può essere semplificata in

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial \vartheta} \right)_p d\vartheta + \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_{\vartheta} dp \simeq \left(\frac{\partial S}{\partial \vartheta} \right)_p d\vartheta = \frac{c_p}{\vartheta} d\vartheta,$$

che sostituita nella (4.4.18) dà

$$\rho c_p \frac{D\vartheta}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} k \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} + \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \quad (4.4.19)$$

Procedendo alla adimensionalizzazione l'equazione diventa

$$\frac{1}{St} \frac{\partial \vartheta^*}{\partial t^*} + u_i^* \frac{\partial \vartheta^*}{\partial x_i^*} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial x_i^*} \frac{\partial \vartheta^*}{\partial x_i^*} + \frac{E}{Re} \sigma_{ij}^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} \quad (4.4.20)$$

in cui si sono considerati la densità ρ , il calore specifico c_p e la conducibilità termica k costanti. Dalla (4.4.20) si osserva che il termine di produzione dovuto alla dissipazione di energia meccanica è moltiplicato per E/Re , cioè per il rapporto tra il numero di Eckert e il numero di Reynolds. Nella tabella 4.1 sono riportati i valori del c_p e ν per l'acqua e l'aria e corrispondenti valori dei due parametri adimensionali ottenuti considerando $\Delta\vartheta_0 = 10K$, $U_0 = 1m/s$ e $L_0 = 1m$. Dai valori ottenuti si deduce che l'errore che si commette trascurando il termine di produzione Φ è molto piccolo. A valle di tutte queste considerazioni il sistema completo di equazioni per la convezione naturale è riportato qui sotto in forma adimensionale, avendo posto $St = 1$ e $Ru = 1$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i^*} = 0 \\ \frac{\partial u_i^*}{\partial t^*} + u_j \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} = - \frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} - \frac{Gr}{Re^2} \vartheta^* f_i^* + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^* \partial x_j^*} \\ \frac{\partial \vartheta^*}{\partial t^*} + u_i^* \frac{\partial \vartheta^*}{\partial x_i^*} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial x_i^*} \frac{\partial \vartheta^*}{\partial x_i^*} \end{cases} \quad (4.4.21)$$

	Acqua	Aria
$c_p (J/Kg K)$	4.18×10^3	1.01×10^3
$\nu (m^2/s)$	1.00×10^{-6}	1.50×10^{-5}
Ec	0.25×10^{-4}	1×10^{-4}
Re	1.00×10^6	$6. \times 10^4$

Tabella 4.1 Valori tipici di E/Re per acqua e aria

in questo sistema le equazioni del moto e dell'energia risultano accoppiate e quindi devono essere risolte simultaneamente.

Analizziamo ora il sistema (4.4.21), in cui appaiono i tre numeri adimensionali Gr , Re e Pr . La prima osservazione da fare è che i valori appropriati dei tre parametri non sono tra loro indipendenti e questo dal momento che la velocità caratteristica U_0 che compare nel numero di Reynolds non è in generale nota a priori. In altri termini la velocità caratteristica del problema non è un parametro imposto, ad esempio, dalle condizioni al contorno, ma il suo valore caratteristico dipende complessivamente dagli altri parametri. Cerchiamo quindi un valore appropriato per U_0 , tenendo però conto che nel problema in esame questa stima non è unica ma dipende dal regime di convezione naturale che si instaura, ossia dal valore del numero di Grashof. È possibile individuare due regimi limite, uno per $\text{Gr} \ll 1$ e uno per $\text{Gr} \gg 1$.

Nel primo caso le forze di galleggiamento sono modeste e quindi le velocità risultanti saranno piccole. In questo limite è lecito ritenere che il termine di galleggiamento risulti dello stesso ordine di grandezza dei termini viscosi e cioè

$$\frac{1}{\text{Re}} \sim \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \quad \text{Gr} \sim \text{Re} \quad (4.4.22)$$

che porta alla stima

$$U_0 = \frac{\Delta \vartheta_0 L_0^2 \beta_0 g_0}{\nu_0}. \quad (4.4.23)$$

Nel secondo caso, $\text{Gr} \gg 1$, le forze di galleggiamento sono tali da generare un campo di moto con velocità caratteristiche più grandi. In questo limite si può supporre che i termini di galleggiamento siano dello stesso ordine di grandezza dei termini convettivi e quindi

$$\frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \sim 1 \quad \text{Gr} \sim \text{Re}^2 \quad (4.4.24)$$

questa posizione porta ad una stima della velocità caratteristica

$$U_0 = (\Delta \vartheta_0 L_0 \beta_0 g_0)^{1/2}. \quad (4.4.25)$$

Assumendo proprio questo ultimo valore per la velocità caratteristica i numeri di Gr e Re non sono più indipendenti e il sistema di equazioni può essere scritto in funzione di soli due parametri come segue

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i^*} = 0 \\ \frac{\partial u_i^*}{\partial t^*} + u_j^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \frac{1}{\sqrt{\text{Gr}}} \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^* \partial x_j^*} - \vartheta^* f_i^* . \\ \frac{\partial \vartheta^*}{\partial t^*} + u_i^* \frac{\partial \vartheta^*}{\partial x_i^*} = \frac{1}{\text{Pr}\sqrt{\text{Gr}}} \frac{\partial}{\partial x_i^*} \frac{\partial \vartheta^*}{\partial x_i^*} \end{cases} \quad (4.4.26)$$

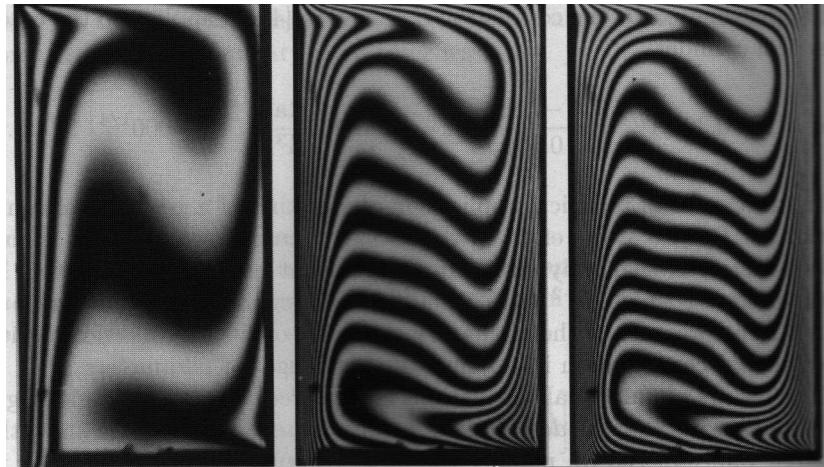


Figura 4.1 Profili di temperatura in un esperimento di convezione naturale. Grashof crescente da destra a sinistra

Si osservi che nei flussi nei quali è presente scambio termico è consuetudine definire un parametro adimensionale, il numero di Nusselt (Nu) che caratterizza il flusso termico in presenza di convezione. Si prenda come esempio il flusso bidimensionale in una cavità rettangolare (vedi figura 4.1) le cui pareti orizzontali siano adiabatiche mentre quelle verticali siano mantenute a temperatura costante in modo tale che la differenza di temperatura tra le due pareti sia $\Delta\vartheta_0$. In questo caso Nu, definito come rapporto tra lo scambio termico effettivo H e quello dovuto a pura conduzione che avrebbe luogo se non ci fossero moti, è pari a

$$\text{Nu} = \frac{HL_0}{k\Delta\vartheta_0} \quad (4.4.27)$$

dove L_0 è la distanza fra le due pareti verticali e k è la conducibilità termica. In generale nei flussi a convezione naturale il numero di Nusselt, che per definizione è ≥ 1 , può essere espresso come

$$\text{Nu} = f(\text{Gr}, \text{Pr}). \quad (4.4.28)$$

Va osservato che all'aumentare del numero di Grashof, cioè in presenza di forti moti convettivi Nu cresce e con esso, quindi, il coefficiente di scambio termico convettivo.

Bibliografia

1. Slattery, J.C., *Momentum, Energy and Mass Transfer in Continua*, McGraw-Hill, 1972.
2. Batchelor, G.K., *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 1967.
3. Acheson, D.J., *Elementary Fluid Dynamics*, Clarendon Press, Oxford, 1990.
4. Tritton, D.J., *Physical Fluid Dynamics*, Von Nostrand, 1981.
5. Landau, L.D., Lifschitz E.M., *Fluid mechanics*, Pergamon Press, 1959.

Appendice 4.A - Soluzione numerica delle equazioni di Navier-Stokes nelle variabili $\psi - \zeta$

Si considerano fluido incompressibili per i quali l'equazione

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 \quad (4.4.29)$$

e le equazioni di Navier-Stokes divengono

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \rho f_i \quad (4.4.30)$$

Si considerano per semplicità moti bidimensionali nel piano xy per la (4.4.29) si scrive

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.4.31)$$

dove $x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$, $u_1 \equiv u$, $u_2 \equiv v$, come abituale, se non si fa uso della notazione indiciale.

La (4.4.31) è la condizione per cui

$$d\psi = u dy - v dx \quad (4.4.32)$$

è un differenziale esatto: infatti

$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\partial v}{\partial y}$$

coincede con la (4.4.31)

Quindi, tenendo conto che $d\psi$ è un differenziale esatto, valgono le

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4.4.33)$$

e la funzione scalare ψ definita da

$$\psi - \psi_0 = \int_0^P (udy - vdx) \quad (4.4.34)$$

viene chiamata funzione di corrente.

Nella (4.4.34) ψ_0 è una costante e l'integrale è fatto lungo una linea arbitraria che collega O , punto di riferimento, con P dove vogliamo calcolare il valore di ψ . Il flusso dato dall'integrale, essendo $d\psi$ un differenziale esatto, è indipendente dalla linea scelta per collegare O con P (se il campo è semplicemente connesso). Dalla (4.4.32) per $d\psi = 0$ si ha

$$udy - vdx = 0 \quad \text{cioè} \quad \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \quad (4.4.35)$$

che è l'equazione delle linee di corrente definite come le linee ovunque tangenti al campo di velocità per un dato tempo t , cioè

$$\frac{dx_i}{d\alpha} = u_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.4.36)$$

che coincidono con la (4.4.35). Quindi le $\psi = \text{cost}$ sono le linee di corrente.

In tal modo si è usata l'equazione (4.4.31) di conservazione della massa per sostituire le due variabili dipendenti u e v con la unica variabile dipendente ψ .

Si può definire in funzione di ψ anche la vorticità $\zeta = 2\omega$

$$\zeta = \nabla \times \mathbf{u} \quad (4.4.37)$$

, che nel caso bidimensionale ha una sola componente normale al piano xy del moto, che indicheremo con lo scalare ζ .

$$\zeta_k \equiv \zeta = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\nabla^2 \psi \quad (4.4.38)$$

Le equazioni di Navier-Stokes (4.4.30) si possono esprimere nella variabile ψ applicando ad esse l'operatore rotore. Prima di ciò rendiamo adimensionali le equazioni, come è sempre opportuno nelle soluzioni numeriche. Consideriamo le variabili adimensionali

$$\begin{aligned} u'_i &= \frac{u_i}{U_i} & \rho'_i &= \frac{\rho}{\rho_0} & p' &= \frac{p}{\rho_0 U_0^2} \\ t' &= \frac{t U_0}{L_0} & x'_i &= \frac{x_i}{L_0} & f'_i &= f \frac{L_0}{U_0^2} \end{aligned} \quad (4.4.39)$$

Sostituendo le espressioni (4.4.39) nella (4.4.30) ed eliminando dopo la sostituzione gli apici non più necessari, ricordando che ora le variabili sono adimensionali, si ottiene

$$\rho_0 \frac{U_0^2}{L_0} \left(\rho' \frac{\partial u'_i}{\partial t'} + \rho' u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} \right) = \rho' f' \rho_0 \frac{U_0^2}{L_0} - \rho_0 \frac{U_0^2}{L_0} \frac{\partial p'}{\partial x'_i} + \mu \frac{U_0^2}{L_0} \frac{\partial^2 u'_j}{\partial x'_j \partial x'_i}$$

dividendo per $\rho_0 \frac{U_0^2}{L_0}$

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho_0 U_0 L_0} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (4.4.40)$$

dove il gruppo adimensionale $\frac{\rho_0 U_0 L_0}{\mu_0}$ è il numero di Reynolds che da il rapporto tra le forze viscose e le forze di inerzia.

Considerando che $\rho = \rho_0$ per l'ipotesi di fluido incompressibile quindi $\rho' = 1$ e le forze di massa conservative cioè

$$f_i = - \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \quad (4.4.41)$$

si ha per il rotore delle equazioni di Navier-Stokes nel caso bidimensionale:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial(p + \Psi)}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ +\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial(p + \Psi)}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

che ricordando la (4.4.38) da luogo all'equazione

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \zeta + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \zeta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= \\ = \mu \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) & \end{aligned} \quad (4.4.42)$$

da cui risulta eliminando il termine in $(p + \Psi)$.

Per la (4.4.33) e la (4.4.42) diviene

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \mu \nabla^2 \zeta \quad (4.4.43)$$

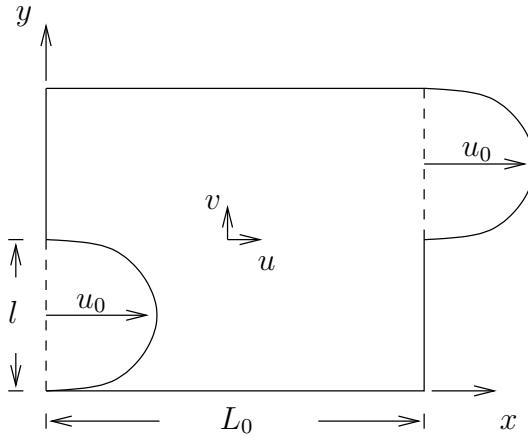
che va risolta insieme alla (4.4.38)

$$-\zeta = \nabla^2 \psi$$

ricordando le (4.4.33)

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

si devono ora specificare, per ottenere delle soluzioni, le condizioni al contorno nelle variabili ψ e ζ . Considerando per semplicità il problema fisico schematizzato in figura



che rappresenta un ambiente rettangolare con un flusso di entrata su un'apertura di lunghezza l e un flusso di uscita su una apertura di lunghezza l per ora ipotizzato di distribuzione identica al flusso di entrata.

Il sistema di equazioni (4.4.43) e (4.4.38) è costituito da due equazioni alle derivate parziali del secondo ordine nelle due incognite ψ, ζ , la (4.4.43) parabolica la (4.4.38) ellittica.

Come visto precedentemente è richiesta una condizione per ciascuna variabile, nel contorno del piano x,y , nel valore della variabile stessa o di sue derivate.

Nel problema fisico conosciamo di solito le condizioni per la velocità al contorno; in particolare sappiamo che alle pareti solide impermeabili

$$u = v = 0 \quad (4.4.44)$$

abbiamo inoltre imposto un profilo di entrata uguale a quello di uscita

$$u = \bar{u}(y) \quad (4.4.45)$$

senza fare per ora alcuna ipotesi per quanto riguarda la componente v in queste due sezioni.

Trasferiamo ora queste condizioni sulle variabili ψ e ζ ricordando le loro definizioni (4.4.34) e (4.4.38). Per la (4.4.44) dalla (4.4.34) si ottiene alla parete inferiore

$$\psi = 0 \quad (4.4.46)$$

assumendo $\psi_0 = 0$ nell'origine O , alla parete superiore

$$\psi = \text{costante} = \psi_1$$

dove ψ_1 si calcola da

$$\psi_1 = \int_0^l u(y) dy \quad (4.4.47)$$

ovvero considerando le variabili adimensionali $y/l = \eta$

$$\psi_1 = \int_0^1 u(\eta) d\eta \quad (4.4.48)$$

assumiamo per il profilo d'entrata una parabola data da

$$u(\eta) = a\eta^2 + b\eta + c$$

tale che per

$$\begin{aligned} \eta = 0 & \quad u = 0 \\ \eta = 1 & \quad u = 0 \\ \eta = 1/2 & \quad u = U_0 \end{aligned}$$

quindi

$$u(\eta) = 4U_0(\eta - \eta^2) \quad (4.4.49)$$

e

$$\psi_1 = \int_0^1 4U_0(\eta - \eta^2) d\eta = \frac{2}{3}U_0 \quad (4.4.50)$$

e lungo le sezioni di entrata e di uscita

$$\psi = \int_0^\eta 4U_0(\eta - \eta^2) d\eta = 4U_0 \left(\frac{\eta^2}{2} - \frac{\eta^3}{3} \right) \quad (4.4.51)$$

In corrispondenza a queste due sezioni si può anche dare la condizione equivalente sulla derivata

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \bar{u}(y) \quad (4.4.52)$$

Per le condizioni sulla variabile ζ alle pareti orizzontali si ha dalla (4.4.38), considerando che $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$

$$\zeta = -\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \quad (4.4.53)$$

analogamente nelle pareti verticali, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ quindi

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (4.4.54)$$

Per le sezioni di entrata e uscita se per la componente v , non ancora specificata si fa l'ipotesi $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ si ha

$$\zeta = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (4.4.55)$$

con $u = \bar{u}(y)$ nota in quelle sezioni dalla (4.4.49).

Se si assumono altre ipotesi, per esempio

$$v = 0 \quad (4.4.56)$$

o

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad \text{cioè} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \quad (4.4.57)$$

si ricavano le corrispondenti condizioni leggermente più complicate della (4.4.55) dalla

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

Specificate le condizioni al contorno in ζ e ψ vediamo come esprimerele alle differenze finite. La (4.4.46), (4.4.51), (4.4.55) non presentano difficoltà.

Per esprimere la (4.4.53) consideriamo lo sviluppo in serie di Taylor, per la variabili ψ nei punti del reticolo discreto, individuati da i e j

$$\psi(i, j+1) = \psi(i, j) + \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{ij} \Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \Big|_{ij} \Delta y^2 + O(\Delta y^3)$$

da cui consideriamo che $\frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{ij} = u(i, j) = 0$ alla parete

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \Big|_{ij} = \frac{2(\psi(i, j+1) - \psi(i, j))}{\Delta y^2} + O(\Delta y) \quad (4.4.58)$$

e per la (4.4.53)

$$\zeta|_p = -\frac{2(\psi(i, j+1) - \psi(i, j))}{\Delta y^2} \quad (4.4.59)$$

con

$$\begin{aligned} \psi(i, j) &= 0 \quad \text{alla parete inferiore} \\ &= \psi_1 \quad \text{alla parete superiore} \end{aligned}$$

La (4.4.58) dà la derivata seconda in avanti con errore $O(\Delta y)$ del primo ordine.

Se si vuole una espressione più accurata bisogna considerare

$$\psi(i, j+1) = \psi(i, j) + \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{ij} \Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \Big|_{ij} \Delta y^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \Big|_{ij} \Delta y^3 + O(\Delta y^4)$$

$$\psi(i, j+2) = \psi(i, j) + \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{ij} 2\Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \Big|_{ij} 4\Delta y^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \Big|_{ij} 8\Delta y^3 + O(\Delta y^4)$$

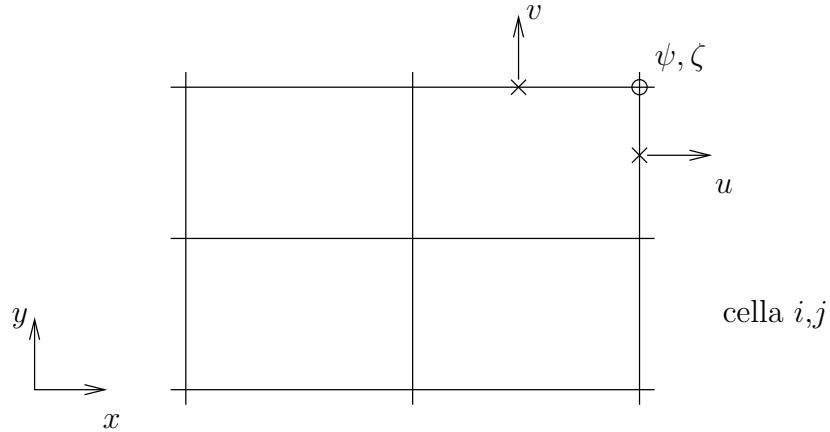
eliminando il termine in Δy^3 , cioè sommando la seconda alla prima moltiplicata per -8 si ottiene, considerando sempre $\frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{ij} = 0$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \Big|_{ij} = \frac{8\psi(i, j+1) - 7\psi(i, j) - \psi(i, j+2)}{2\Delta y^2} + O(\Delta y^2) \quad (4.4.60)$$

e quindi $\zeta|_p = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \Big|_{ij}$ al secondo ordine.

In maniera del tutto analoga si possono ricavare le espressioni alle differenze finite per la (4.4.53) alla parete superiore, considerando gli sviluppi per $\psi(i, j-1)$ e $\psi(i, j-2)$ e per la (4.4.54) considerando gli sviluppi per $\psi(i+1, j), \psi(i+2, j)$ o $\psi(i-1, j), \psi(i-2, j)$ rispettivamente alle 2 pareti verticali.

Una scelta opportuna per la localizzazione delle variabili sul reticolo discreto è la seguente



cioè ψ e ζ si definiscono ai nodi del reticolo di discretizzazione, mentre le componenti u, v della velocità si definiscono rispettivamente a metà del lato lungo x e lungo y della cella i, j . In tal modo è possibile esprimere nel modo più accurato le u, v in funzione di ψ , secondo le (4.4.33), con derivate centrate al secondo ordine

$$u(i, j) = \frac{\psi(i, j+1) - \psi(i, j)}{\Delta y} \quad (4.4.61)$$

$$v(i, j) = -\frac{\psi(i, j) - \psi(i-1, j)}{\Delta x} \quad (4.4.62)$$

, la ζ in funzione di u, v mediante la

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

per analoghi motivi

$$\zeta_{ij} = \frac{v(i+1) - v(i,j)}{\Delta x} - \frac{u(i+1) - u(i,j)}{\Delta y} \quad (4.4.63)$$

, la ψ in funzione di u e v mediante la

$$d\psi = udy - vdz$$

per la quale la disposizione delle variabili indicata da la più accurata rappresentazione del flusso attraverso i lati della cella, lungo i quali può essere scelto il percorso di integrazione. Per le equazioni (4.4.38) e (4.4.43) si assumono derivate centrate nello spazio e in avanti nel tempo, per le considerazioni di accuratezza e stabilità viste in precedenza.